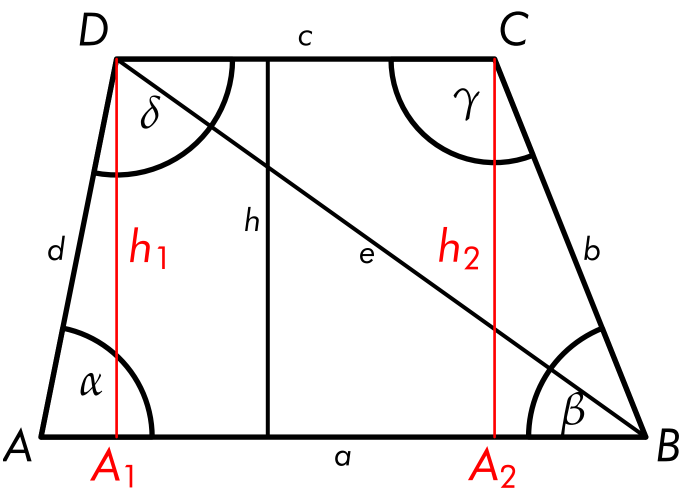
Lösungen

Aufgaben zur Vertiefung



$\alpha = 52°$; $\gamma = 110°$; $h = 2{,}5$ cm; $e = 5{,}5$ cm

h nach links bis D bzw. nach rechts bis C verschieben $\rightarrow$ es entstehen drei rechtwinklige Dreiecke AA_1D (spitzer Winkel bei D sei δ_1), A_2BC (spitzer Winkel bei C sei γ_1) und A_1BD

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{d}$$
$$\rightarrow\ d = \frac{h_1}{\sin\alpha} = \underline{\underline{3{,}2\text{ cm}}}$$

$$\tan\alpha = \frac{h_1}{|\overline{AA_1}|}$$
$$\rightarrow\ |\overline{AA_1}| = \frac{h_1}{\tan\alpha} = \underline{2{,}0\text{ cm}}$$

$$\delta = 90° + \delta_1 = 90° + (180° - 52° - 90°) = \underline{\underline{128°}}$$

$$\beta = 360° - \alpha - \gamma - \delta = \underline{\underline{70°}}$$

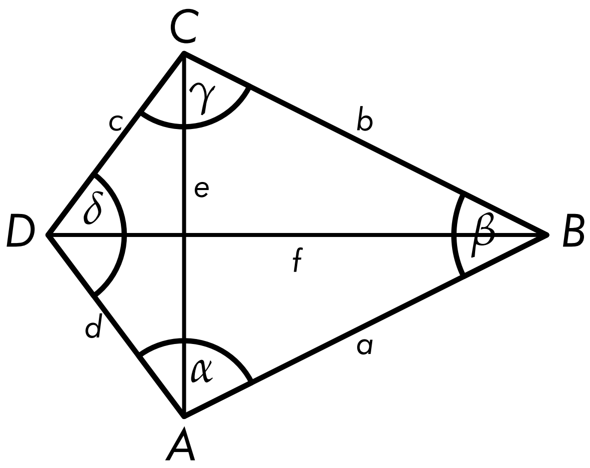
$$\gamma_1 = \gamma - 90° = \underline{20°}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{h_2}{b}$$
$$\rightarrow\ b = \frac{h_2}{\cos\gamma_1} = \underline{\underline{2{,}7\text{ cm}}}$$

$$\tan\gamma_1 = \frac{|\overline{A_2B}|}{h_2}$$
$$\rightarrow\ |\overline{A_2B}| = h_2 \cdot \tan\gamma_2 = \underline{0{,}9\text{ cm}}$$

$$|\overline{A_1B}| = \sqrt{e^2 - h_1^2} = \underline{4{,}9\text{ cm}}$$

$$a = |\overline{AA_1}| + |\overline{A_1B}| = \underline{\underline{6{,}9\text{ cm}}}$$
$$c = |\overline{A_1B}| - |\overline{A_2B}| = \underline{\underline{4{,}0\text{ cm}}}$$



$\beta = 40°$; $\delta = 56°$; $a = 7{,}6$ cm

Nutzen der gleichschenkligen Dreiecke *ABC* (Basiswinkel $\alpha_1 = \gamma_1$) und *ACD* (Basiswinkel $\alpha_2 = \gamma_2$)

$$\alpha_1 = \frac{180° - \beta}{2} = \underline{70°}$$
$$\alpha_2 = \frac{180° - \delta}{2} = \underline{62°}$$
$$\gamma = \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \underline{\underline{132°}}$$

$$b = a = \underline{\underline{7{,}6\text{ cm}}}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{\frac{1}{2}e}{a}$$
$$\rightarrow\ e = 2 \cdot a \cdot \cos\alpha_1 = \underline{\underline{5{,}2\text{ cm}}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{\frac{1}{2}e}{d}$$
$$\rightarrow\ c = d = \frac{\frac{1}{2}e}{\cos\alpha_2} = \underline{\underline{5{,}5\text{ cm}}}$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{f_{ABC}}{a}$$
$$\rightarrow\ f_{ABC} = a \cdot \sin\alpha_2 = \underline{7{,}1\text{ cm}}$$
$$\tan\alpha_2 = \frac{f_{ACD}}{\frac{1}{2}e}$$
$$\rightarrow\ f_{ACD} = \frac{1}{2}e \cdot \tan\alpha_2 = \underline{4{,}9\text{ cm}}$$
$$f = f_{ABC} + f_{ACD} = \underline{\underline{12{,}0\text{ cm}}}$$

S. 152 / 3

(a) (i) Starte mit dem Quadrat ABCD mit $a = 3$ cm und konstruiere den Thaleskreis über der Seite $\overline{AB}$ (Radius 3cm).

(ii) Trage von A aus 2 cm auf dem Thaleskreis ab. Nenne diesen Punkt E. $\rightarrow$ Dreieck AEB ist rechtwinklig.

(iii) Konstruiere eine Senkrechte zu $\overline{AB}$ durch B. Lasse diese Gerade mit der Verlängerung von $\overline{AE}$ schneiden (Punkt F). Es entsteht das rechtwinklige Dreieck AFB.

(iv) Konstruiere das Rechteck AGHF unter AF mit $|\overline{AG}| = |\overline{FH}| = |\overline{AE}| = 2$ cm.

(b) (i) Konstruiere das Rechteck ABCD mit $|\overline{AB}| = 3{,}5$ cm und $|\overline{AD}| = 5{,}5$ cm.

(ii) Trage 3,5 cm auf $\overline{AD}$ von A aus ab. Es entsteht der Punkt E.

(iii) Konstruiere den Thaleskreis über $\overline{AD}$.

(iv) Konstruiere die Senkrechte zu $\overline{AD}$ durch E. Der Schnittpunkt mit dem Thaleskreis sei F. Das Dreieck ADF ist demnach rechtwinklig.

(v) Konstruiere ein Quadrat mit der Seite $\overline{AF}$ über dieser Seite.

(c) Nutze zur Konstruktion (b) mit $|\overline{AB}| = 3$ cm und $|\overline{AD}| = 5$ cm.

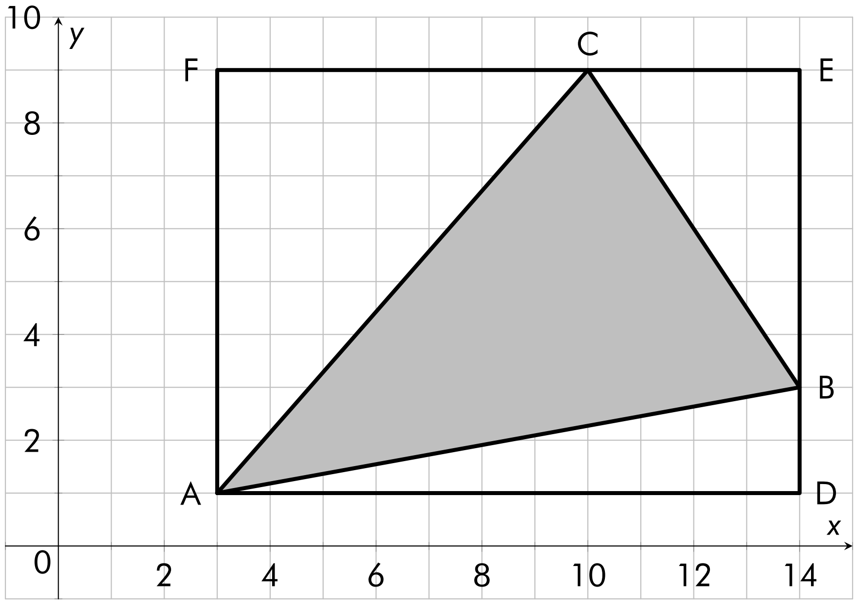
S. 152 / 4

(a) Erinnerung: Abstand zweier Punkte $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$: $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_B - y_A)^2}$ nach dem Satz des Pythagoras → A = 16,125 FE

(b) $a = 6{,}52$ LS; $b = 5{,}41$ LE; $c = 6{,}58$ LE

(c) $h_a = 4{,}95$ LE; $h_b = 5{,}96$ LE; h_c =4,90 LE (Nutzen des Flächeninhaltes aus (a) und der Seitenlängen aus (b))

(d) Prinzipiell kann immer ein Rechteck um das Dreieck gelegt werden, so dass dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen:



Dann gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{ADEF} - A_{ADB} - A_{BEC} - A_{CFA} \\ &= |\overline{AD}| \cdot |\overline{DE}| - \frac{1}{2}|\overline{AD}| \cdot |\overline{BD}| - \frac{1}{2}|\overline{BE}| \cdot |\overline{CE}| - \frac{1}{2}|\overline{CF}| \cdot |\overline{AF}| \\ &= \frac{1}{2}(2 \cdot |\overline{AD}| \cdot |\overline{DE}| - |\overline{AD}| \cdot |\overline{BD}| - |\overline{BE}| \cdot |\overline{CE}| - |\overline{CF}| \cdot |\overline{AF}|) \end{aligned}$$

Die Längen sind alle ganzzahlig, ebenso die Produkte, damit auch die gesamte Klammer. Dementsprechend ist die Hälfte davon immer ein Vielfaches von $\frac{1}{2}$.

149 / 21

(1) normalerweise beginnt der Sinkflug zwischen 191073 und 114737 m vor dem Landeplatz.

(2) Spätestens aber 57587 m vor dem Landeplatz muss der Sinkflug beginnen.

149 / 22 Der Höhenunterschied beträgt 29,76 m. Der Steigungswinkel ist rund 6,84° groß.

Aufgabe 3

(a) $\overline{BG}$ ist die Diagonale der Würfelseite: $|\overline{BG}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \underline{7{,}1 \text{ cm}}$

$\overline{AG}$ ist die sogenannte Raumdiagonale. Nutzen wir $\overline{BG}$, dann kommt man schnell auf $|\overline{AG}| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \underline{8{,}7 \text{ cm}}$

(b) $\angle ABC = 90°$;

$$\tan(\angle GAB) = \frac{|\overline{BG}|}{|\overline{AB}|} \to \underline{\angle GAB = 54{,}7°}$$
$$\tan(\angle AGB) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BG}|} \to \underline{\angle AGB = 35{,}3°}$$

(c) M sei Mittelpunkt der Strecke $\overline{BD}$, dann erhält man den gesuchten Winkel als $180° - \angle CMG$. $\overline{MC}$ ist die halbe Diagonale der Grundfläche, also gilt $|\overline{MC}| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2+5^2}$. Damit gilt:

$$\tan\angle CMG = \frac{|\overline{MC}|}{|\overline{CG}|} = \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{5^2+5^2}} \to \underline{\angle CMG = 54{,}7°}$$

Der gesuchte Winkel ist somit $\underline{125{,}5°}$.

(d) Volumen der Pyramide: $V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 10}{2} = \frac{50}{3}$ cm^2.

Abfall: $10^3 - V_p \approx \underline{983{,}3 \text{ cm}^2}$