Lösungen zu den Kongruenzsätzen für Dreiecke

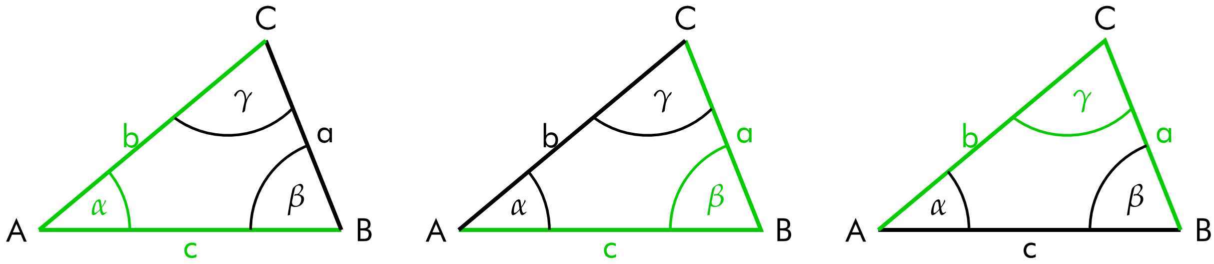
B Der Kongruenzsatz sws

Satz. Stimmen zwei Dreiecke in den Längen **zweier Seiten** und der Größe des von den Seiten **eingeschlossenen Winkels** überein, so sind die Dreiecke kongruent.

Alternative Formulierung:

Satz. Ein Dreieck ist eindeutig konstruierbar, wenn die Längen zweier Seiten und die Größe des von den Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt sind.

Beispiele: Sei ABC ein Dreieck:



geg.: b,α,c c,β,a a,γ,b

ACHTUNG! Damit zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ kongruent sind, muss nicht gelten $a_1 = a_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ und $b_1 = b_2$. Es reicht zu, dass zwei beliebige Seiten und der dazwischenliegende Winkel gleich groß sind! D. h. die Seiten und Winkel müssen nicht die gleiche Bezeichnung haben.

Dementsprechend sind in Aufgabe 1 (a) und (c) kongruent, der Rest nicht.

In Aufgabe 2 müssen die Ingenieure keine weitere Messung machen, da ja zwei Seiten des Dreiecks und der eingeschlossene Winkel bekannt sind.

Konstruktion:

- eine gegebene Seite zeichnen
- den gegebenen Winkel an seinem Eckpunkt abtragen
- von diesem Eckpunkt aus die zweite Seitenlänge auf dem zweiten Schenkel des Winkels abtragen und man erhält den dritten Eckpunkt

In Aufgabe 3 sind nur die Dreiecke in (a) kongruent.

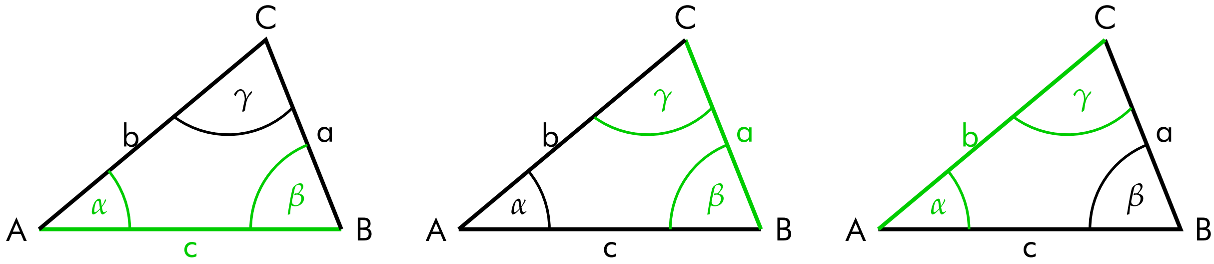
C Der Kongruenzsatz wsw

Satz. Stimmen zwei Dreiecke in der Länge **einer Seite** und den Größen der **anliegenden Winkel** überein, so sind die Dreiecke kongruent.

Alternative Formulierung:

Satz. Ein Dreieck ist eindeutig konstruierbar, wenn die Länge einer Seite und die Größe der anliegenden Winkel bekannt sind.

Beispiele: Sei ABC ein Dreieck:



geg.: α,c,β β,a,γ γ,b,α

ACHTUNG! Damit zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ kongruent sind, muss nicht gelten $\alpha_1 = \alpha_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ und $b_1 = b_2$. Es reicht zu, dass eine beliebige Seite und die anliegenden Winkel gleich groß sind! D. h. Die Winkel und die Seite müssen nicht die gleiche Bezeichnung haben.

Dementsprechend sind in Aufgabe 1 (a) und (d) kongruent, der Rest nicht.

In Aufgabe 2 muss die Baubehörde die Breite des Daches vorschreiben.

Konstruktion:

- die gegebene Seite zeichnen
- die anliegenden Winkel von ihren Eckpunkten aus abtragen
- wo sich die beiden neu gezeichneten Schenkel schneiden ist der dritte Eckpunkt

In Aufgabe 3 sind nur die Dreiecke in (a) kongruent.

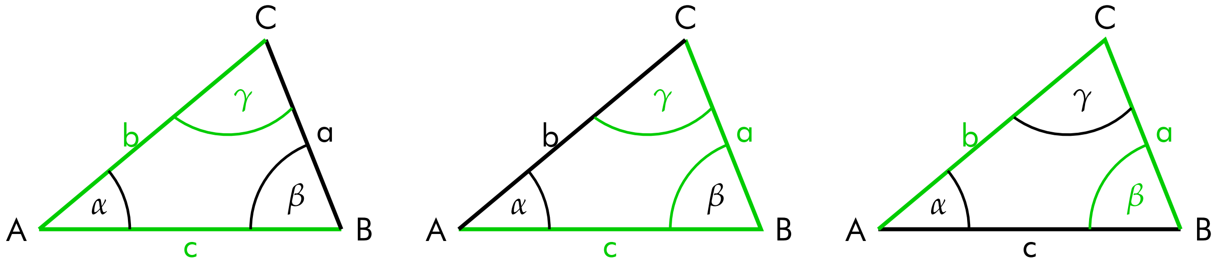
D Der Kongruenzsatz Ssw

Satz. Stimmen zwei Dreiecke in den Längen **zweier Seiten** und der Größe des **Winkels**, welcher der **größeren** von beiden Seiten **gegenüberliegt**, überein, so sind die Dreiecke kongruent.

Alternative Formulierung:

Satz. Ein Dreieck ist eindeutig konstruierbar, wenn die Längen zweier Seiten und die Größe des der größeren Seite gegenüberliegenden Winkels bekannt sind.

Beispiele: Sei ABC ein Dreieck:



geg.: b, c, γ — a, c, γ — a, b, β

ACHTUNG! Damit zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ kongruent sind, muss nicht gelten $a_1 = a_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ und $b_1 = b_2$, falls a_1 bzw. a_2 jeweils die längere Seite ist. Es reicht zu, dass zwei beliebige Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel gleich groß sind! D. h. die Seiten und der Winkel müssen nciht gleich bezeichnet sein.

In Aufgabe 1 kommen dementsprechend nur bei (a) und (c) das gleiche Dreieck wie in der Abbildung heraus. Die restlichen zwei Fälle führen jeweils zu zwei anderen, nicht zur Abbildung kongruenten Dreiecken.

In Aufgabe 2 muss unbedingt erwähnt werden, dass der Winkel der größeren von beiden Seiten gegenüberzuliegen hat.

Konstruktion:

- die kürzere Seite zeichnen
- den gegebenen Winkel an seinem Eckpunkt abtragen
- vom anderen Eckpunkt aus mit dem Zirkel die längere der beiden Seiten abtragen, der Schnittpunkt mit dem Schenkel des Winkel ist der dritte Eckpunkt

In Aufgabe 3 sind die Dreiecke in (a) und (c) kongruent.

Lösungen AH S. 40 / 14

(a) schon im Unterricht verglichen

(b) $b = 6{,}2$ cm; $\alpha = 42°$; $\gamma = 56°$

(c) $\beta = 100°$; $a = 4{,}0$ cm; $c = 3{,}3$ cm

(d) $b = 2{,}9$ cm; $\gamma = 44°$; $\beta = 22°$