Teil B2

2.1 ▶ **Gleichschenkligkeit nachweisen**

Da das Dreieck ABC im Punkt C rechtwinklig sein soll, müssen die beiden Schenkel des Dreiecks die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sein. die Längen dieser beiden Seiten kannst du über die Vektorbeträge der zugehörigen Vektoren berechnen:

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \left|\overrightarrow{AC}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix}-3,5\\0\\3,5\end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{(-3,5)^2+0^2+3,5^2} \\ &= \sqrt{24,5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \left|\overrightarrow{BC}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix}3,5\\0\\3,5\end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{3,5^2+0^2+3,5^2} \\ &= \sqrt{24,5}\end{aligned}$$

Beide Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind also gleich lang. Das Dreieck ABC ist damit gleichschenklig.

▶ **Rechtwinkligkeit nachweisen**

Das Dreieck ABC besitzt bei C einen rechten Winkel, wenn die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ orthogonal zueinander sind. Dies ist der Fall, wenn dies auf die zugehörigen Vektoren zutrifft. Das kannst du wiederum mithilfe ihres Skalarprodukts überprüfen:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix}-3,5\\0\\3,5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3,5\\0\\3,5\end{pmatrix} \\ &= -3,5\cdot 3,5+0\cdot 0+3,5\cdot 3,5 \\ &= 0\end{aligned}$$

Das Dreieck ABC ist im Punkt C also rechtwinklig.

2.2 ▶ **Volumen der Dachkonstruktion bestimmen**

Die Dachkonstruktion besteht insgesamt aus vier Teilen:

- Ein halber gerader Kreiszylinder mit dem Volumen V_K
- Drei identische Prismen jeweils mit dem Volumen V_P

1. Schritt: Volumen des halben Kreiszylinders berechnen

Das Prisma, das direkt unter dem halben Kreiszylinder liegt, hat die gleiche Form wie das Prisma mit der Grundfläche ABC, ist aber „auf den Kopf gestellt.“ Der Durchmesser der Grundfläche des Kreiszylinders entspricht daher der Streckenlänge $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned} d_K &= \overline{AB} \\ &= \left|\overrightarrow{AB}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= 7\,[\mathrm{m}] \end{aligned}$$

Die Höhe des halben Kreiszylinders ist $h = 140,0\,\mathrm{m}.$ Mit der entsprechenden Formel erhältst du:

$$\begin{aligned} V_K &= \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\tfrac{7\,\mathrm{m}}{2}\right)^2 \cdot 140,0\,\mathrm{m} \\ &\approx 2.693,92\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

2. Schritt: Volumen eines Prismas berechnen

Da die Grundfläche ABC des Prismas rechtwinklig ist, ergibt sich mithilfe der Berechnungen aus 1.1 für den Flächeninhalt der Grundfläche ABC :

$$\begin{aligned} G_{ABC} &= \tfrac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{24,5} \cdot \sqrt{24,5} \\ &= 12,25\,[\mathrm{m}^2] \end{aligned}$$

Die Höhe des Prismas beträgt ebenfalls $h = 140,0\,\mathrm{m}.$ Für das Volumen folgt:

$$\begin{aligned} V_P &= G_{ABC} \cdot h \\ &= 12,25\,\mathrm{m}^2 \cdot 140,0\,\mathrm{m} \\ &= 1.715\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

3. Schritt: Gesamtvolumen berechnen

$$\begin{aligned} V &= V_K + 3 \cdot V_P \\ &\approx 2.693,92\,\mathrm{m}^3 + 3 \cdot 1.715\,\mathrm{m}^3 \\ &= 7.838,92\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Das gesamte Volumen der Dachkonstruktion beträgt also ca. $7.839\,\mathrm{m}^3$.

2.3 ▶ **Ebenengleichung zeigen**

Da die Seitenkanten der Prismen parallel zur y-Achse verlaufen, ergeben sich die Koordinaten von D und E aus den Koordinaten von A und C durch eine Verschiebung in y-Richtung um $140,0$ Einheiten:

$D(7 \mid -140,0 \mid 4)$ und $E(3,5 \mid -140,0 \mid 7,5)$

Einsetzen der Koordinaten der vier Eckpunkte der Dachfläche $ACED$ in die Gleichung von ϵ liefert.

$$\begin{array}{rcll} x+z &=& 11 & \quad \mid A(7 \mid 0 \mid 4) \\ 7+4 &=& 11 & \\ 11 &=& 11 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x+z &=& 11 & \quad \mid C(3,5 \mid 0 \mid 7,5) \\ 3,5+7,5 &=& 11 & \\ 11 &=& 11 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x+z &=& 11 & \quad \mid D(7 \mid 140,0 \mid 4) \\ 7+4 &=& 11 & \\ 11 &=& 11 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x+z &=& 11 & \quad \mid E(3,5 \mid 140,0 \mid 7,5) \\ 3,5+7,5 &=& 11 & \\ 11 &=& 11 & \end{array}$$

Alle vier Eckpunkte A, C, D und E der Dachfläche $ACED$ liegen also in der Ebene ϵ mit der Gleichung $x+z=11$, was daher für die gesamte Dachfläche $ACED$ gilt.

2.4 ▶ **Winkelgröße berechnen**

1. Schritt: Koordinaten des Mittelpunkts bestimmen

Da das Prisma gerade ist, handelt es sich bei $ACED$ um ein Rechteck. Der Mittelpunkt dieses Rechtecks ist daher der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{AE}$. Seine Koordinaten können mithilfe der zugehörigen Formel bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \tfrac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}\right) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,5 \\ -140,0 \\ 7,5 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 5,25 \\ -70,0 \\ 5,75 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Schritt: Geradengleichung aufstellen

Die Sichtlinie liegt auf der Geraden s durch die beiden Punkte M und K. Diese Gerade kann mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
s: \vec{x} &= \overrightarrow{OK} + r \cdot \overrightarrow{KM} \\
&= \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -24,75 \\ -90,0 \\ 4,25 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Schritt: Größe des Schnittwinkels berechnen

Der gesuchte Winkel entspricht dem Schnittwinkel α der Geraden s und der Ebene ϵ. Mithilfe der zugehörigen Formel erhältst du:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\left| \begin{pmatrix} -24,75 \\ -90,0 \\ 4,25 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -24,75 \\ -90,0 \\ 4,25 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} \\
\sin\alpha &= \frac{|-24,75 \cdot 1 + (-90,0) \cdot 0 + 4,25 \cdot 1|}{\sqrt{(-24,75)^2 + (-90,0)^2 + 4,25^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} \\
\sin\alpha &= \frac{20,5}{\sqrt{17.461,25}} \qquad | \sin^{-1} \\
\alpha &\approx 8,9^\circ
\end{aligned}
$$

Die Sichtlinie schließt mit der Dachfläche $ACED$ einen Winkel mit einer Größe von ca. $8,9^\circ$ ein.

2.5 ► **Begründen, dass die Höhe keine Rolle spielt**

Die Sichtlinie der Kamera in dem Moment, in dem sie die Flugzeugspitze erfassen kann, verläuft entlang einer Geraden. Diese Gerade berührt die Dachkonstruktion in einem Punkt wie eine Tangente, da die Kamera ja nicht durch die Dachkonstruktion hindurch schauen kann.
Um die halbzylinderförmige Dachkonstruktion in ihrem höchsten Punkt zu berühren, müsste die Gerade

waagerecht verlaufen. Da die Position der Kamera aber die z-Koordinate $1,5$ besitzt, liegt sie deutlich unter der höchsten Stelle des Dachs, wodurch diese Gerade nicht waagerecht verlaufen kann.
Der Punkt, in dem die Sichtlinie die Dachkonstruktion tangiert, ist also keiner der Punkte, die am hächsten über dem Boden des Gebäudes liegen, sondern ein anderer Punkt der Dachkonstruktion. Daher spielt die Höhe der höchsten Punkte keine Rolle bei der Ermittlung der gesuchten Höhe.

▶ **Gesuchte Höhe ermitteln**

Die Flugzeugspitze bewegt sich entlang der Geraden mit der folgenden Gleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -60 \\ -990 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sie hat also die Koordinaten $S(-60-20s \mid -990 \mid 7s)$. Die Sichtlinie der Kamera, in dem Moment, in dem sie die Flugzeugspitze erblickt, liegt auf der Geraden, die durch K und S verläuft. Anhängig von der Position von S kann diese durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \vec{x}_s &= \overrightarrow{OK} + t \cdot \overrightarrow{KS} \\ &= \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 1,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -90-20s \\ -1.010 \\ 7s-1,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Flugzeugspitze wird unmittelbar über einem der Punkte der Geraden mit der folgenden Gleichung sichtbar:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0 \\ 10,9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gerade durch K und S muss also auch durch einen Punkt dieser Geraden verlaufen. Setze beide also gleich:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 1,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -90-20s \\ -1.010 \\ 7s-1,5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0 \\ 10,9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| -\begin{pmatrix} 1,1 \\ 0 \\ 10,9 \end{pmatrix}; -t \cdot \begin{pmatrix} -90-20s \\ -1.010 \\ 7s-1,5 \end{pmatrix} \right. \\ \begin{pmatrix} 28,9 \\ 20 \\ -9,4 \end{pmatrix} &= r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -90-20s \\ -1.010 \\ 7s-1,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus erhältst du folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 28,9 &=& 90t+20ts \\ \text{II} & 20 &=& -r+1.010t \\ \text{III} & -9,4 &=& -7st+1,5t \end{array}$$

Forme beispielsweise die erste Gleichung nach t um:

$$\begin{array}{rcll} 28,9 &=& 90t+20ts & \\ 28,9 &=& t\cdot(90+20s) & \mid :(90+20s) \\ \dfrac{28,9}{90+20s} &=& t & \end{array}$$

Das kannst du nun in die dritte Gleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rcll} -9,4 &=& -7s\cdot\dfrac{28,9}{90+20s}+1,5\cdot\dfrac{28,9}{90+20s} & \mid \cdot(90+20s) \\ -846-188s &=& -202,3s+43,35 & \mid +202,3s \\ -846+14,3s &=& 43,35 & \mid +846 \\ 14,3s &=& 889,35 & \mid :14,3 \\ s &=& \dfrac{1.617}{26} & \end{array}$$

Dies kannst du nun in die zugehörige Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OS} &=& \begin{pmatrix}-60\\-990\\0\end{pmatrix}+\dfrac{1.617}{26}\cdot\begin{pmatrix}-20\\0\\7\end{pmatrix} \\ &\approx& \begin{pmatrix}-1304\\-990\\435\end{pmatrix} \end{array}$$

Die gesuchte Höhe entspricht der z-Koordinate des Punkts, in dem sich die Spitze in dem Moment befindet. Die gesuchte Höhe beträgt also ca. $435\,\mathrm{m}$.

2.6 ▶ **Vereinfachung begründen**

Geht man vereinfachend von einer Binomialverteilung aus, so geht man davon aus, dass jede Person mit einer Buchung unabhängig von den übrigen Personen mit Buchung am Flug teilnimmt. Die Entscheidung, am Flug teilzunehmen, fällt aber in der Realität nicht unbedingt unabhängig von anderen Personen. Wenn beispielsweise eine Familie gemeinsam bucht, wird sie voraussichtlich auch gemeinsam am Flug teilnehmen oder nicht teilnehmen. Daher handelt es sich bei der Annahme einer Binomialverteilung um eine Vereinfachung.

2.7 ▶ **Erwartete Anzahl der teilnehmenden Personen angeben**

Betrachte die Zufallsgröße X, die die zufällige Anzahl der Personen mit Buchung beschreibt, die tatächlich am Flug teilnehmen. Diese wird als binomialverteilt angenommen, wobei $n=220$ und $p=0,9$ ist.
Mithilfe der zugehörigen Formel für den Erwartungswert ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} \mu &=& n\cdot p \\ &=& 220\cdot 0,9 \\ &=& 198 \end{array}$$

Es sind 198 Personen mit Buchung zu erwarten, die tatsächlich am Flug teilnehmen.

▶ Wahrscheinlichkeiten berechnen

Mithilfe der Formel für die Binomialverteilung folgt für Ereignis A :

$$\begin{array}{rcl} P(A) & = & P(X=200) \\ & = & \binom{220}{200}\cdot 0,9^{200}\cdot 0,1^{20} \\ & \approx & 0,0840 \\ & = & 8,40\,\% \end{array}$$

Für Ereignis B kannst du dein CAS verwenden:

▶ TI nspire CAS

menu → 5 → 5 → E: Binomial Cdf

▶ Casio Classpad II

Interaktiv → Verteilungsfunktionen → Diskret → binomial CDf

Mindestens eine Person muss abgewiesen werden, wenn mindestens 211 Personen mit Buchung am Flug teilnehmen wollen.

$$\begin{array}{rcll} P(B) & = & P(X\geq 211) & \quad\mid CAS \\ & \approx & 0,0010 & \\ & = & 0,1\,\% & \end{array}$$