Teil B1

1.1 ▶ **Koordinaten des Maximumpunktes angeben**

Mit deinem CAS kannst du die Koordinaten des Hochpunkts wie folgt bestimmen:

▶ **TI nspire CAS**

menu → 6: Graph analysieren → 3: Maximum

▶ **Casio Classpad II**

Analyse → Grafische Lösung → Maximum

Du erhältst $H(7,9 \mid 6,5)$.

1.2 ▶ **Geradengleichung nachweisen**

Die Steigung m der Geraden durch B und C kann über den Differenzenquotienten der Koordinaten von B und C berechnet werden:

$$\begin{array}{rl} m &= \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \\ &= \dfrac{6,9-5,4}{13,0-10,0} \\ &= 0,5 \end{array}$$

Die Gerade, die durch die beiden Punkte B und C verläuft, besitzt also die Steigung $m = 0,5$. Den zugehörigen y-Achsenabschnitt kannst du mithilfe einer Punktprobe bestimmen:

$$\begin{array}{rrcll} BC: & y &=& m\cdot x+b & \mid m=0,5 \\ & y &=& 0,5x+b & \mid B(10,0\mid 5,4) \\ & 5,4 &=& 0,5\cdot 10,0+b & \\ & 5,4 &=& 5+b & \mid -5 \\ & 0,4 &=& b & \end{array}$$

Die Gerade g, die durch B und C festgelegt wird, kann also durch die Gleichung $y = 0,5\cdot x+0,4$ beschrieben werden.

▶ **x-Koordinate ermitteln**

Die beschriebene Tangente verläuft parallel zur Geraden g. Sie hat also ebenfalls die Steigung $m = 0,5$.
Die Steigung einer Tangente an den Graphen einer Funktion f im Punkt $P(x_P \mid f(x_P))$ hat die Steigung $f'(x_P)$. Gesucht ist also x_P mit $f'(x_P) = 0,5$.

$$\begin{array}{rl} f(x) &= -0,25x^2+3,95x-9,10 \\ f'(x) &= -0,50x+3,95 \end{array}$$

Die Gleichung $f'(x) = 0,5$ kannst du nun mit dem solve-Befehl deines CAS lösen.

Du erhältst $x_P = 6,9.$

1.3 ▶ **Benötigte Zeit berechnen**

1. Schritt: Flächeninhalt berechnen

Die Fläche lässt sich als Trapez auffassen, aus dem zwei Teilfächen mit den Flächeninhalten A_1 und A_2 herausgetrennt werden:

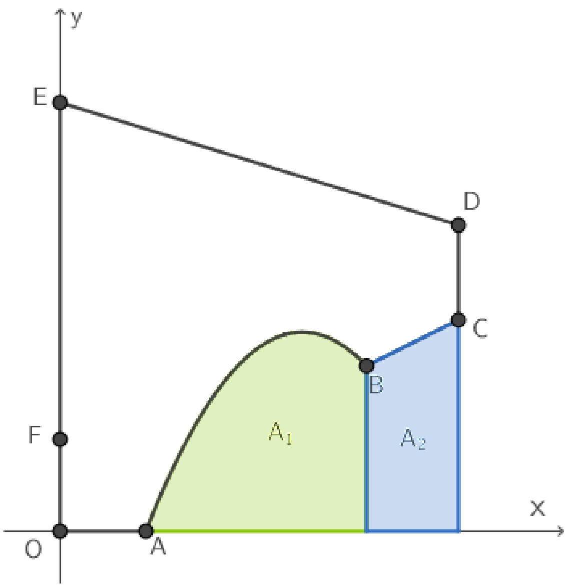


Abb. 1: Flächenskizze

- A_1 : Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich $2,8 \leq x \leq 10,0.$
- A_2 : Der Inhalt des kleineren Trapezes, das $\overline{BC}$ mit der x-Achse bildet.

Das größere Trapez ist rechtwinklig und besitzt die x-Koordinate von D als Höhe. Die Seitenlängen der beiden parallelen Seiten erhältst du aus den y-Koordinaten der Punkte E und $D.$ Es ergibt sich also für den Flächeninhalt A_T des größeren Trapezes:

$$\begin{aligned} A_T &= \tfrac{1}{2} \cdot (y_D + y_E) \cdot x_D \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot (10,0 + 14,0) \cdot 13,0 \\ &= 156,00\,[\mathrm{m}^2] \end{aligned}$$

Den Flächeninhalt A_1 zwischen dem Graphen von f und der x-Achse kannst du mithilfe eines Integrals berechnen. Den Wert des Integrals kannst du wiederum mit deinem CAS bestimmen:

▶ **TI nspire CAS**

menu → 4: Analysis → 3: Integral

▶ **Casio Classpad II**

keyboard → Math2 → $\int_{\square}^{\square} \square$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{2,8}^{10,0} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{2,8}^{10,0} \left(-0,25x^2+3,95x-9,10\right)\,\mathrm{d}x \quad \mid CAS \\ &\approx 34,992\,[\mathrm{m}^2] \end{aligned}$$

Das kleinere Trapez ist ebenfalls rechtwinklig. Seine Höhe entspricht der Differenz der x-Koordinaten von B und C. Die Längen der beiden parallelen Seiten entsprechen den y-Koordinaten von B und C.

$$\begin{aligned} A_2 &= \tfrac{1}{2}\cdot(y_c+y_b)\cdot(x_C-x_B) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(6,9+5,4)\cdot(13,0-10,0) \\ &= 18,45\,[\mathrm{m}^2] \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A der begrenzten Fläche ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} A &= A_T-(A_1+A_2) \\ &\approx 156,00\,[\mathrm{m}^2]-\left(34,992\,[\mathrm{m}^2]+18,45\,[\mathrm{m}^2]\right) \\ &\approx 102,6\,[\mathrm{m}^2] \end{aligned}$$

Der Rasenroboter muss also ca. $102,6\,\mathrm{m}^2$ Rasenfläche mähen.

2. Schritt: Benötigte Zeit berechnen

Der Rasenroboter kann unter optimalen Bedingungen $2,5\,\mathrm{m}^2$ pro Minute mähen.

$$102,6\,\mathrm{m}^2 : 2,5\,\mathrm{m}^2 \approx 41,04$$

Der Rasenroboter benötigt ca. $41,0$ Minuten zum Mähen der gesamten begrenzten Fläche.

1.4 ▶ **Minimale Länge ermitteln**

Der Punkt F hat die Koordinaten $F(0,0\mid 3,0)$. Die Koordinaten von Q sind $Q(x_Q\mid f(x_Q))$. Der Abstand von F und Q kann mit folgender Funktion d beschrieben werden:

$$\begin{aligned} d(x_Q) &= \sqrt{(x_Q-x_F)^2+(y_Q-y_F)^2} \\ &= \sqrt{(x_Q-0,0)^2+\left(-0,25x_Q^2+3,95x_Q-9,10-3,0\right)^2} \\ &= \sqrt{x_Q^2+\left(-0,25x_Q^2+3,95x_Q-12,10\right)^2} \end{aligned}$$

Bestimme nun das Minimum von d. Q muss auf dem Graphen von f zwischen A und B liegen. Es muss also $2,8\leq x_Q\leq 10,0$ sein.

▶ **TI nspire CAS**

Mit dem fMin-Befehl erhältst du die Stelle $x \in [2,8; 10,0]$, an der der Funktionswert von d am kleinsten ist.

fMin(d(x),x, 2,8 , 10,0)

$x_{\text{min}} \approx 3,4$

Der zugehörige Funktionswert lässt sich ebenfalls mit dem CAS berechnen:

$$d(3,4) \quad \approx \quad 3,7$$

▶ **Casio Classpad II**

Mit dem fMin-Befehl erhältst du den kleinsten Funktionswert von f im angegebenen Intervall und die zugehörige Stelle x_{min}.

fMin(d(x),x, 2,8 , 10,0)

$$d(x_{\text{min}}) \quad \approx \quad 3,7$$

Die minimale Länge der Strecke $\overline{FQ}$ beträgt also ca. $3,7\,\text{m}$.

1.5 ▶ **y-Koordinate nachweisen**

Die beiden Punkte P_1 und P_2, die auf $\overline{DE}$ bzw. $\overline{BC}$ liegen und den gleichen Abstand gemessen parallel zur y-Achse zu M haben, haben die gleiche x-Koordinate wie M.
Bestimme die Koordinaten dieser beiden Punkte.

1. Schritt: Koordinaten von P_2 bestimmen

Die Strecke $\overline{BC}$ liegt auf der Geraden g. Für die y-Koordinate von P_2 gilt daher:

$$\begin{aligned} y_{P_2} &= 0,5 \cdot 10,4 + 0,4 \\ &= 5,6 \end{aligned}$$

2. Schritt: Geradengleichung für $\overline{DE}$ bestimmen

Die Steigung der Geraden, auf der die Strecke $\overline{DE}$ liegt kannst du wie in Aufgabenteil 1.2 berechnen:

$$\begin{aligned} m_{DE} &= \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} \\ &= \frac{10,0 - 14,0}{13,0 - 0,0} \\ &= -\tfrac{4}{13} \end{aligned}$$

Da E auf der y-Achse liegt, entspricht der y-Achsenabschnitt der Geraden der y-Koordinate von E.
Eine Gleichung der Geraden, auf der $\overline{DE}$ liegt, lautet also:

$$DE: \; y = -\tfrac{4}{13}x + 14,0$$

3. Schritt: Koordinaten von P_1 bestimmen

P_1 hat die x-Koordinate $10,4$ wie M und liegt auf der Geraden DE.

$$\begin{array}{lll} y_{P_1} & = & -\frac{4}{13}\cdot 10,4+14,0 \\ & = & 10,8 \end{array}$$

4. Schritt: Lage von M begründen

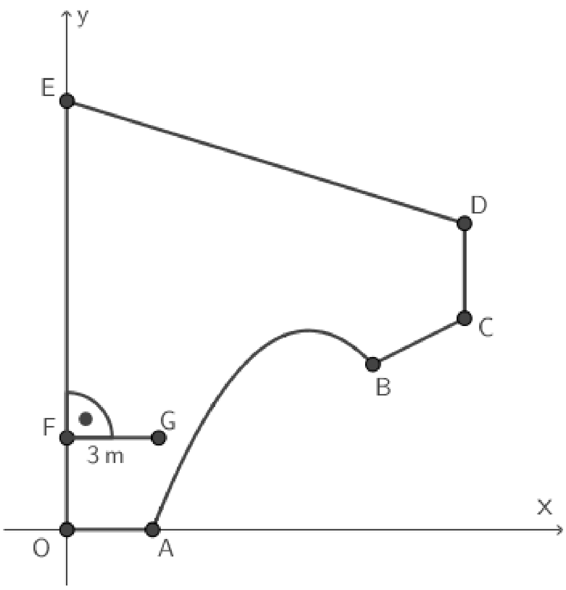
M liegt genau in der Mitte zwischen $P_1(10,4\mid 10,8)$ und $P_2(10,4\mid 5,6)$ und ist damit der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_1P_2}$. Mit der Formel für den Mittelpunkt einer Strecke ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{OM} & = & \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}\right) \\ & = & \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}10,4\\10,8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10,4\\5,6\end{pmatrix}\right) \\ & = & \begin{pmatrix}10,4\\8,2\end{pmatrix} \end{array}$$

Die Koordinaten von M lauten also $M(10,4\mid 8,2)$.

▶ Funktionsgleichung bestimmen

1. Schritt: Koordinaten von G bestimmen



Objekt rechts

Abb. 2: Suchkabel

Die Strecke $\overline{EO}$ liegt auf der y-Achse. Das Suchkabel verläuft orthogonal dazu von der Ladestation drei Meter lang zum Punkt G. Der Punkt G besitzt also die x-Koordinate $x_G=3,0$ und die gleiche y-Koordinate wie F, $y_G=3,0$.

$G(3,0\mid 3,0)$.

2. Schritt: Funktionsgleichung aufstellen

Da h eine ganzrationale Funktion zweiten Grades ist, kann sie durch eine Gleichung der folgenden Form beschrieben werden.

$h(x) = ax^2 + bx + c.$

Die folgenden drei Punkte sollen auf dem Graphen von h liegen:

$G(3,0 \mid 3,0)$, $H(7,5 \mid 9,0)$ und $M(10,4 \mid 8,2)$.

Es ergibt sich also folgendes Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{llcl}
\mathrm{I} & 3,0 & = & h(3,0) \\
 & 3,0 & = & a\cdot 3,0^2 + b\cdot 3,0 + c \\
 & 3,0 & = & 9a + 3b + c \\
\mathrm{II} & 9,0 & = & h(7,5) \\
 & 9,0 & = & a\cdot 7,5^2 + b\cdot 7,5 + c \\
 & 9,0 & = & 56,25a + 7,5b + c \\
\mathrm{III} & 8,2 & = & h(10,4) \\
 & 8,2 & = & a\cdot 10,4^2 + b\cdot 10,4 + c \\
 & 8,2 & = & 108,16a + 10,4b + c
\end{array}
$$

Insgesamt also folgendes Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{I} & 3,0 & = 9a + 3b + c \\
\mathrm{II} & 9,0 & = 56,25a + 7,5b + c \\
\mathrm{III} & 8,2 & = 108,16a + 10,4b + c
\end{array}
$$

Du kannst es mit dem solve-Befehl deines CAS lösen:

$$
\begin{array}{lcl}
a & \approx & -0,2175 \\
b & \approx & 3,6167 \\
c & \approx & -5,8928
\end{array}
$$

Eine Gleichung von h lautet also ca.

$h(x) = -0,2175x^2 + 3,6167x - 5,8928.$

1.6 ► **Wahrscheinlichkeit ermitteln**

Du kannst dir zum Sachverhalt ein Baumdiagramm zeichnen. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

- E : Der Roboter erkennt das Hindernis
- $\overline{E}$: Der Roboter erkennt das Hindernis nicht
- F : Der Roboter setzt seine Fahrt fort

- $\overline{F}$: Der Roboter setzt seine Fahrt nicht fort

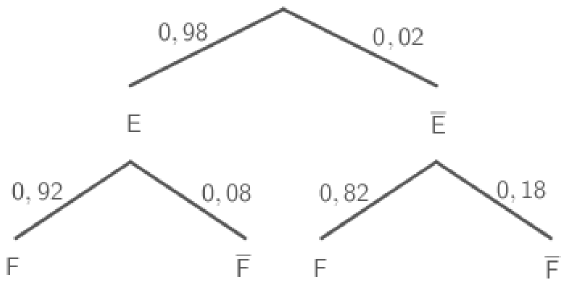


Abb. 3: Baumdiagramm

Mit den Pfadregeln ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(F) &= 0,98 \cdot 0,92 + 0,02 \cdot 0,82 \\ &= 0,918 \\ &= 91,8\,\% \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $91,8\,\%$ setzt der Rasenroboter nach dem Hindernis seine Arbeit fort.

1.7 ▶ **Wahrscheinlichkeit bestimmen**

Trifft der Roboter auf ein Hindernis, dann setzt er seine Arbeit laut Aufgabe 1.6 mit einer Wahrscheinlichkeit von $91,8\,\%$ fort. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $8,2\,\%$ bleibt er also stehen. Diese Wahrscheinlichkeiten sind bei jedem Hindernis gleich und unabhängig von anderen Hindernissen. Mit der Pfadmultiplikationsregel erhältst du:

$$0,918 \cdot 0,918 \cdot 0,918 \cdot 0,082 \approx 0,0634 = 6,34\,\%$$

Trifft der Rasenroboter auf vier Hindernisse, so setzt er mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $6,34\,\%$ bei den ersten drei Hindernissen seine Arbeit fort und bleibt beim vierten Hindernis stehen.

Bildnachweise [nach oben]