Teil A

1 Das Kreuz muss im korrekten Feld sein.

1.1 Feld 4

1.2 Feld 4

1.3 Feld 2

1.4 Feld 4

1.5 Feld 3

2

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 11 \\ f''(x) &= 6x^- 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x_w) = 0 &= 6x_w - 12 \\ x_w &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_w) = f(2) &= 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Wendepunkt W(2|0)

Tangente im Wendepunkt: $y = mx + n$ mit $m = f'(2) = -1$. Mit Einsetzen des Wendepunktes in die bisher erzielte Tangentengleichung $y = -1 \cdot x + n$ folgt $0 = -1 \cdot 2 + n \rightarrow n = 2$, also lautet die Gleichung der Tangente

$$t_w\colon y = -x + 2.$$

3 Für identische Geraden müssen die Richtungen linear abhängig, also ein Vielfaches voneinander sein:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} n \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \rightarrow \underline{n = 6}.$$

Weiterhin müssen beide Geraden alle Punkte gemeinsam haben, also kann man z. B. den Stützvektor von g in h einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ m \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösen des GLS liefert $\underline{m = -4}$

4 Beim zweimaligen Würfeln kann X die Werte 0, 1 und 2 annehmen:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$$\rightarrow E(X) = 0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}}$$

Teil B

1 1.1 x_B in g einsetzen liefert $y_B = \frac{-3}{5} \cdot 45{,}0 = -27{,}0$.

Damit ist der Tagebauabschnitt $|-27{,}0| = 27{,}0$ m tief.

$D(225{,}0|-63{,}0)$ in h einsetzen als Nachweis:

$$-63{,}0 = -\frac{9}{40} \cdot 225{,}0 - \frac{99}{8} = -63{,}0 \text{ w. A.}$$

Für C berechnen wir die zugehörige x-Koordinate, wenn $y_C = -27{,}0$ gilt, z. B. mit dem CAS im Graph-Menü und der x-Berechnung für h erhalten wir $x_C = 65{,}0$.

1.2 Berechnung des Tiefpunktes der Profillinie:

$$f'(x) = 21{,}2 \cdot 10^{-7}x^3 - 9{,}18 \cdot 10^{-4}x^2 + 11{,}02 \cdot 10^{-2}x - 3{,}29 \overset{!}{=} 0$$

Bestimmung mit z. B. CAS im Main liefert drei Nullstellen, wobei sich $x_E = 249{,}8$ nach Einsetzen in $f''(x) = 63{,}6 \cdot 10^{-7}x^2 - 18{,}36 \cdot 10^{-4}x + 11{,}02 \cdot 10^{-2}$ als Tiefpunkt herauskristallisiert und der zugehörige Funktionswert $y_E = -89{,}7$ beträgt. Damit ist die maximale Tiefe gezeigt.

1.3 Zu bestimmen sind die kritischen Stellen der ersten Ableitung $f'(x)$ (z. B. mit dem CAS im Graph-Menü) im angegebenen Intervall: $x_k = 85{,}1 \rightarrow f'(85{,}1) = 0{,}746 = 74{,}6\% < 75\%$, also kann das Raupenfahrzeug die Strecke bewältigen.

1.4 Wassermenge $V = 5000{,}0 \cdot \left| \int_{0,0}^{299,3} f(x)\,dx \right| = 7{,}11 \cdot 10^7$. Anzahl der Tage t ergibt sich als

$$t = \frac{7{,}11 \cdot 10^7 \text{m}^3}{42 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}} = 1692857 \text{ min} \approx 1176 \text{ Tage}$$

1.5 Gesucht ist der kürzeste Abstand d vom Roboter zur Profillinie (Punkt $P(x_P|y_P)$):

$$d = \sqrt{(60{,}0 - x_P)^2 + (-10 - y_P)^2}$$

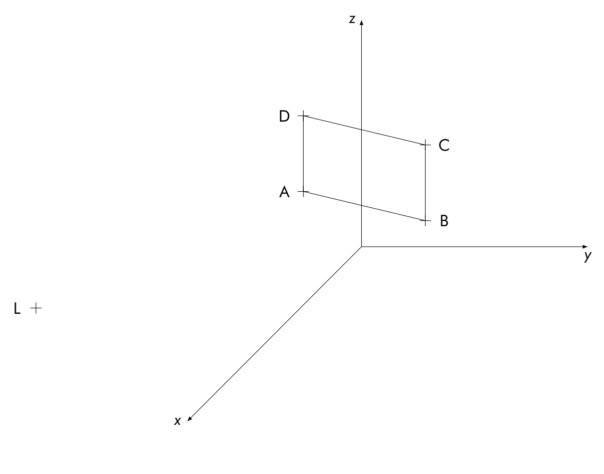
Lösung mit dem CAS (Graph-Menü): Bestimmung des Minimums der Abstandsfunktion d: $E_1(12{,}5|52{,}9)$ und $E_2(84{,}2|40{,}4)$, also beträgt der kürzeste Abstand 40,4 m.

1.6 Anzahl der Schleien in der Stichprobe: 100-48-36=16. Damit kann man auf 16 % Schleien in der Grundgesamtheit schließen.

$$P(\text{je ein Fisch}) = 3! \cdot \frac{48}{100} \cdot \frac{36}{100} \cdot \frac{16}{100} = 6 \cdot \frac{48}{100} \cdot \frac{36}{100} \cdot \frac{16}{100} \approx 0{,}1659$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis rund 16,6 %.

2 2.1



2.2 Lichtstrahl von L nach B kann durch Gerade g beschrieben werden mit

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen wir den Schnittpunkt mit der yz-Ebene, also $x = 0$, dann ist $t = 2$ und somit erhalten wir B′(0|12|3).

2.3 Zeichnen des Bildvierecks in der yz-Ebene ergibt, dass $\overline{A'D'}$ und $\overline{B'C'}$ die parallelen Seiten sind, was rechnerisch durch Bestimmung der Verbindungsvektoren nachgewiesen werden kann: $\overrightarrow{A'D'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, welche offensichtlich linear abhängig, also Vielfache voneinander sind. Damit ist das Viereck ein Trapez.

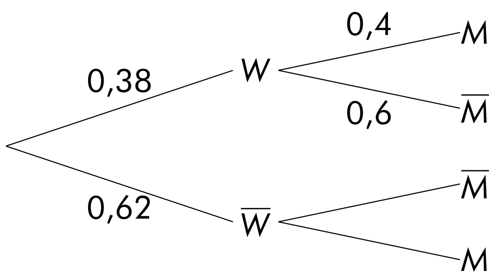
Für den Flächeninhalt eines Trapezes gilt: $A = \dfrac{a+c}{2} \cdot h$ mit $a = |\overrightarrow{A'D'}| = 3$, $c = |\overrightarrow{B'C'}| = 4$ und $h = |\overrightarrow{A'B'}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 10$

$\underline{A = 35 \text{ m}^2}$.

2.4 Allgemein gilt nun für die Gerade g aus 2.2: $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ h \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 3-h \end{pmatrix}$. Analog kann man eine Gerade h aufstellen, auf der L_h und C liegen: $h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ h \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 5-h \end{pmatrix}$.

Zu berechnen sind nun die Durchstoßpunkte von g und h mit der yz-Ebene, also für $x = 0$, welche sich als $B'_h(0|12|6-h)$ und $C'_h(0|12|10-h)$ ergeben. Der Abstand $|\overrightarrow{B'_hC'_h)}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 4$, welcher offensichtlich konstant ist.

2.5 W … Passant nimmt Werbeschild wahr; M … Passant ist männlich:



$P(W \cap \overline{M}) = 0{,}38 \cdot 0{,}6 = \underline{0{,}228}$

2.6 X ... Anzahl der Passanten, die das Schild wahrnehmen $\rightarrow$ binomialverteilt mit $\mathcal{B}_{250;\,0,38}$

Gesucht ist nun $P(X \leq 99)$, was mithilfe des CAS und der Funktion BINOMIALCDF(0,99,250,0.38) berechnet werden kann: $\underline{P(X \leq 99) = 0{,}7223}$

2.7 H_0: $p \leq 0{,}38$

X ... Anzahl der Passanten, die das Schild wahrnehmen $\rightarrow$ binomialverteilt mit $\mathcal{B}_{120;\,0,38}$, Signifikanzniveau ist $\alpha = 0{,}05$ bei einem rechtsseitigen Signifikanztest:

Mithilfe des CAS kann z. B. im Graph-Menü unter Zuhilfenahme der Funktion BINOMIALCDF(X,120,120,0.38) die obere Grenze des Annahmebereiches [0;b] ermittelt werden, da gelten muss $P(X > b) \leq 0{,}05$: der Annahmebereich ergibt sich als [0;54], also wird die Nullhypothese für X>54 abgelehnt, sprich wenn mindestens 55 Passanten das Schild wahrnehmen.