Teil B2

Aufgaben PLUS Lösungen TI PLUS Lösungen Casio PLUS

2.1 ▶ **Geringste Höhe nachweisen**

Die Höhe der beiden Eckpunkte, die nicht auf der z-Achse liegen ist mit 10 Metern angegeben. Der dritte Eckpunkt ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der z-Achse. Alle Punkte auf der z-Achse haben die Koordinaten $E_z(0 \mid 0 \mid z)$. Einsetzen in die Ebenengleichung liefert:

$$\begin{array}{rcll} E:\ 3x+3y-4z &=& -16 & \quad \mid x=0, y=0 \\ -4z &=& -16 & \quad \mid :(-4) \\ z &=& 4 & \end{array}$$

Der Eckpunkt des Überhangs, der auf der z-Achse liegt hat die Koordinaten $E(0 \mid 0 \mid 4)$ und damit eine Höhe von 4 Metern über dem Hallenboden. Die anderen beiden Eckpunkte des dreieckigen Überhangs befinden sich 10 Meter über dem Hallenboden. Damit ist 4 Meter die geringste Höhe über dem Hallenboden.

2.2 ▶ **Neigungswinkel bestimmen**

Der Neigungswinkel α des Überhangs gegenüber dem Hallenboden entspricht dem Neigungswinkel der Ebene E gegenüber der x-y-Ebene. Dessen Größe kann mithilfe eines Normalenvektors von E, beispielsweise aus der Ebenengleichung $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, und einem Normalenvektor der x-y-Ebene, beispielsweise $\vec{n}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{n}_z|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_z|} \\
\cos\alpha &= \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} \\
\cos\alpha &= \frac{4}{\sqrt{3^2+3^2+(-4)^2}\cdot 1} \\
\cos\alpha &= \frac{4}{\sqrt{34}} \qquad \mid \cos^{-1} \\
\alpha &\approx 46,69^\circ
\end{aligned}$$

Der Überhang ist gegenüber dem Hallenboden um ca. $46,69^\circ$ geneigt.

2.3 ▶ **Koordinaten ermitteln**

Der Punkt Q ist der Schnittpunkt des Überhangs und des Seils, also der Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g, die senkrecht zum Überhang durch den Punkt P verläuft.
Diese Gerade kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
g:\ \vec{x} &= \overrightarrow{OP} + t\cdot\vec{n}_E \\
&= \begin{pmatrix}0,0\\0,0\\10,0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Punkte auf der Geraden haben also die Koordinten $G_t(3t \mid 3t \mid 10,0-4t)$. Einsetzen in die Ebenengleichung liefert:

$$\begin{aligned}
E:\ 3x+3y-4z &= -16 \\
3\cdot 3t + 3\cdot 3t - 4\cdot(10,0-4t) &= -16 \\
34t - 40 &= -16 \qquad \mid +40 \\
34t &= 24 \qquad \mid :34 \\
t &= \tfrac{12}{17}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Geradengleichung von g liefert den Ortsvektor von Q :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \begin{pmatrix}0,0\\0,0\\10,0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix} \qquad \mid t=\tfrac{12}{17}\\ &= \begin{pmatrix}0,0\\0,0\\10,0\end{pmatrix} + \tfrac{12}{17}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{36}{17}\\\frac{36}{17}\\\frac{122}{17}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Punkt Q hat die Koordinaten $Q\left(\frac{36}{17}\mid\frac{36}{17}\mid\frac{122}{17}\right)$.

▶ Länge des Seils bestimmen

Die Länge des Seils kann über den Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PQ}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{PQ}\right| &= \left|\begin{pmatrix}\frac{36}{17}\\\frac{36}{17}\\\frac{-48}{17}\end{pmatrix}\right| \qquad \mid CAS\\ &= \frac{12\cdot\sqrt{34}}{17}\\ &\approx 4,12\end{aligned}$$

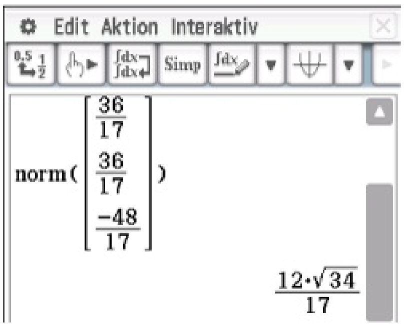

Abb. 1: Berechnung mit dem CAS

Das Seil zwischen den Punkten P und Q ist ca. $4,12\,\mathrm{m}$ lang.

2.4 **▶ Materialkosten berechnen**

1. Schritt: Koordinaten der Eckpunkte berechnen

Der erste Eckpunkt des dreieckigen Überhangs hat die Koordinaten $E(0\mid 0\mid 4)$. Die übrigen beiden befinden sich an den beiden Kletterwänden jeweils in einer Höhe von $10,0$ Metern über dem Hallenboden. Beide haben also die z-Koordinate $z=10$. Einer von ihnen befindet sich in der x-z-Ebene und hat daher die y-Koordinaten $y=0$, der zweite befindet sich in der y-z-Ebene und hat daher die x-Koordinate $x=0$:

$R(0\mid y_R\mid 10)$, $S(x_S\mid 0\mid 10)$

Beide Punkte müssen auf der Ebene E liegen:

$$\begin{aligned} E:\ 3x+3y-4z &= -16 \\ 3\cdot 0+3\cdot y_R-4\cdot 10 &= -16 \\ 3\cdot y_R-40 &= -16 \quad \mid +40 \\ 3y_R &= 24 \quad \mid :3 \\ y_R &= 8 \end{aligned}$$

Der zweite Eckpunkt hat also die Koordinaten $R(0\mid 8\mid 10)$.

$$\begin{aligned} E:\ 3x+3y-4z &= -16 \\ 3\cdot x_S+3\cdot 0-4\cdot 10 &= -16 \\ 3x_S-40 &= -16 \quad \mid +40 \\ 3x_S &= 24 \quad \mid :3 \\ x_S &= 8 \end{aligned}$$

Der dritte Eckpunkt hat die Koordinaten $S(8\mid 0\mid 10)$.

2. Schritt: Flächeninhalt des Überhangs berechnen

Der Flächeninhalt des Dreiecks ERS kann mit dem Kreuzprodukt wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} A_{ERS} &= \tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{ER}\times\overrightarrow{RS}\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\8\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8\\-8\\0\end{pmatrix}\right| \quad \mid CAS \\ &= 8\cdot\sqrt{34} \\ &\approx 46{,}65 \end{aligned}$$

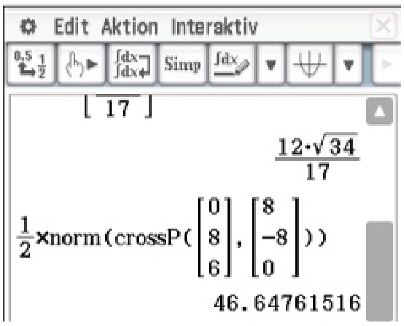

Abb. 2: Berechnung mit dem CAS

Der Überhang ist ca. $46{,}65\,\mathrm{m}^2$ groß.

3. Schritt: Kosten berechnen

$$\begin{aligned} K &= A\cdot 50\,\tfrac{€}{\mathrm{m}^2}\cdot 1{,}19 \\ &= 46{,}65\,\mathrm{m}^2\cdot 50\,\tfrac{€}{\mathrm{m}^2}\cdot 1{,}19 \\ &\approx 2.776\,€ \end{aligned}$$

Einschließlich Mehrwertsteuer betragen die Materialkosten für den Austausch des Überhangs ca. $2.776\,€$.

2.5 ▶ **Koordinaten berechnen**

Der Punkt B liegt auf der z-Achse und hat demnach folgende Koordinaten:

$B(0,0 \mid 0,0 \mid z_B)$

Die Länge der Kletterroute kann in Abhängigkeit von z_B dargestellt werden:

$$\begin{aligned} d(z_B) &= \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} -4,0 \\ 0,0 \\ z_B \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0,0 \\ 6,0 \\ 6,0 - z_B \end{pmatrix}\right| \end{aligned}$$

Gesucht ist nun z_B, sodass $d(z_B)$ minimal ist. Mit dem notwendigen Kriterium für lokale Extremstellen und dem solve-Befehl des CAS ergibt sich:

$$\begin{aligned} d'(z_B) &= 0 \\ z_B &= \tfrac{12}{5} \end{aligned}$$

Mit dem hinreichenden Kriterium folgt:

$d''\left(\frac{12}{5}\right) \approx 0,26 > 0$

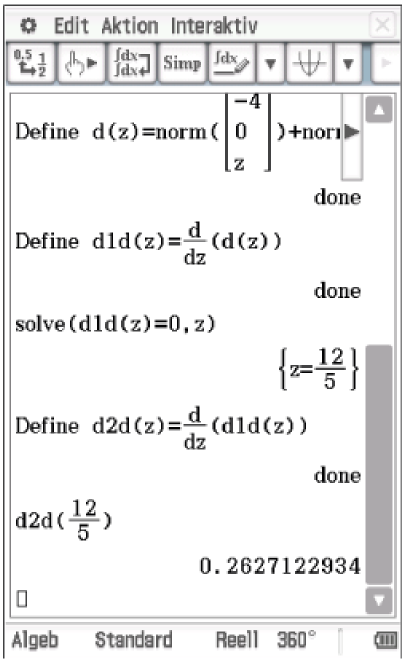

Abb. 3: Ableitung: Keyboard → Math2

Bei $z = \frac{12}{5} = 2,4$ handelt es sich also um eine lokale Minimalstelle von d. Da dies das einzige Extremum von d ist, ist dies die Stelle mit dem kleinsten Funktionswert von d.
Der Punkt B hat für die kürzeste Route die Koordinaten $B\,(0,0 \mid 0,0 \mid 2,4)$.

2.6 ▶ **Anzahl der zu erwartenden Abstürze berechnen**

$62\,\%$ aller gewählten Kletterrouten werden ohne Absturz bewältigt. Von 100 Kletterrouten sind also $100 \cdot 0,62 = 62$ Kletterrouten ohne Absturz erwartet. Bei den übrigen $100 - 62 = 38$ wird ein Absturz erwartet.

Bei 100 gewählten Kletterrouten werden also 38 Abstürze erwartet.

2.7 ▶ **Wahrscheinlichkeit für einen Absturz berechnen**

Es ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Kletterroute ohne Absturz bei einer Kletterroute der Kategorie I $54\,\%$ beträgt. Wir bezeichnen mit A das Ereignis, dass bei einer Kletterroute ein Absturz erfolgt, mit I das Ereignis, dass es sich bei einer Kletterroute um eine Kletterroute der Kategorie I handelt.

Alle Kletterrouten, die nicht ohne Absturz bewältigt werden, führen zu einem Absturz. Mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit, bzw. dem Gegenereignis, folgt daher:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{I}}(A) &= 1 - P_{\mathrm{I}}(\overline{A}) \\ &= 1 - 0,54 \\ &= 0,46 \\ &= 46\,\% \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $46\,\%$ erfolgt bei einer Kletterroute der Kategorie I ein Absturz.

▶ **Wahrscheinlichkeit für keinen Absturz berechnen**

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P_{\mathrm{II}}(\overline{A})$. Bekannt ist die Gesamtwahrscheinlichkeit einer Kletterroute ohne Absturz unabhängig von der Kategorie der Route mit $P(\overline{A}) = 54\,\%$ und die Wahrscheinlichkeit einer Route ohne Absturz bei einer Route der Kategorie I mit $P_{\mathrm{I}}(\overline{A}) = 54\,\%$.

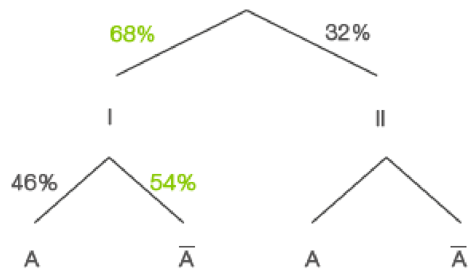

Abb. 4: Baumdiagramm

Mit den Pfadregeln setzt sich $P(\overline{A})$ wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= P(\mathrm{I}) \cdot P_{\mathrm{I}}(\overline{A}) + P(\mathrm{II}) \cdot P_{\mathrm{II}}(\overline{A}) && \mid P(\mathrm{II}) = 1 - P(\mathrm{I}) \\ P(\overline{A}) &= P(\mathrm{I}) \cdot P_{\mathrm{I}}(\overline{A}) + (1 - P(\mathrm{I})) \cdot P_{\mathrm{II}}(\overline{A}) \\ 0,62 &= 0,68 \cdot 0,54 + 0,32 \cdot P_{\mathrm{II}}(\overline{A}) \\ 0,62 &= 0,3672 + 0,32 \cdot P_{\mathrm{II}}(\overline{A}) && \mid -0,3672 \\ 0,2528 &= 0,32 \cdot P_{\mathrm{II}}(\overline{A}) && \mid :0,32 \\ 0,79 &= P_{\mathrm{II}}(\overline{A}) \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $79\,\%$ erfolgt bei einer Kletterroute der Kategorie II kein Absturz.

Bildnachweise [nach oben]