

Teil B1

Aufgaben **PLUS** Lösungen TI **PLUS** Lösungen Casio **PLUS**

1.1 ► Länge der Strecke ermitteln

Da die untere Begrenzungslinie der Portalöffnung auf der x -Achse liegt und die rechte Begrenzungslinie der Portalöffnung auf dem Graphen von g liegt, ist F_2 der Schnittpunkt des Graphen von g mit der x -Achse.

F_1 entspricht der Spiegelung von F_2 an der y -Achse und liegt daher ebenfalls auf der x -Achse. Die Länge der Strecke ergibt sich daher über den doppelten Betrag der x -Koordinate von F_2 .

Mit dem solve-Befehl des CAS ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(x_{F_2}) &= 0 \\ x_{F_2} &= \frac{39}{25} \\ &= 1,56 \end{aligned}$$

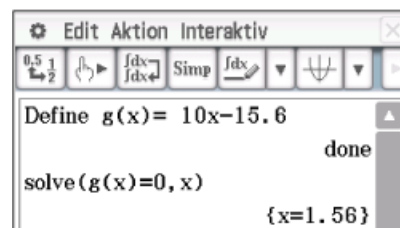


Abb. 1: Berechnung mit dem CAS

Die Koordinaten der Punkte lauten also $F_1(-1,56 \mid 0)$ und $F_2(1,56 \mid 0)$.

$$\begin{aligned} |F_1 F_2| &= 2 \cdot 1,56 \\ &= 3,12 \end{aligned}$$

Die Länge der Strecke $\overline{F_1 F_2}$ beträgt **3,12**.

► Zeigen, dass der Punkt auf beiden Graphen liegt

Der Punkt S_2 liegt auf beiden Graphen, wenn seine Koordinaten die beiden Funktionsgleichungen von f und g erfüllt. Einsetzen der Koordinaten von S_2 in die Funktionsgleichungen von f und g liefert:

$$\begin{aligned} f(1,8) &= -0,1128 \cdot 1,80^4 - 0,0789 \cdot 1,80^2 + 3,8400 \\ &\approx 2,40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1,8) &= 10,0 \cdot 1,8 - 15,6 \\ &= 2,4 \end{aligned}$$

Der Punkt S_2 liegt damit auf den Graphen beider Funktionen f und g .

► Geradengleichung angeben

Die beiden Punkte F_2 und S_2 liegen auf dem Graphen der Funktion g . Da die Frontfläche des Tunnelportals achsensymmetrisch ist, entsteht die gesuchte Gerade h durch die Punkte F_1 und S_1 durch Spiegelung des Graphen von g an der y -Achse. Für den Funktionsterm bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= g(-x) \\
 &= 10,0 \cdot (-x) - 15,6 \\
 &= -10,0 \cdot x - 15,6
 \end{aligned}$$

Die Punkte F_1 und S_1 liegen auf der Geraden h mit der Gleichung $h(x) = -10,0 \cdot x - 15,6$.

1.2 ► Größe des Winkels angeben

Die entsprechenden Begrenzungslinien liegen auf den Graphen von f und g . Gesucht ist also der größere der beiden Winkel, die von diesen beiden Graphen gebildet werden.

Es wurde bereits gezeigt, dass der Punkt $S_2(1,80 \mid 2,40)$ auf beiden Graphen liegt, also der Schnittpunkt dieser ist.

Die Größe des Schnittwinkels α kann daher anhand der Steigungen m_1 und m_2 der beiden Graphen in diesem Punkt mit dem Tangens berechnet werden. Diese Steigungswerte ergeben sich durch die zugehörige Ableitungsfunktion f' bzw. g' .

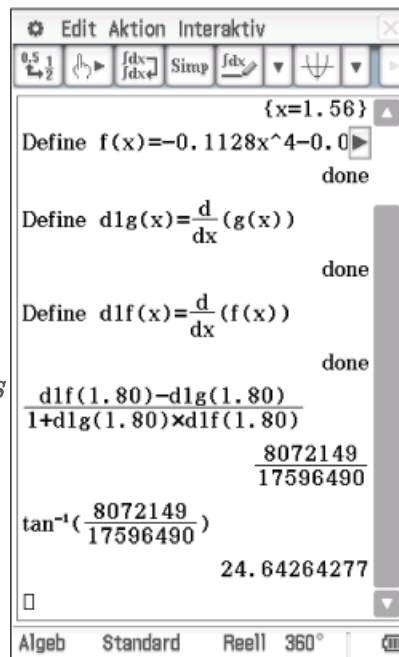
$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

$$\tan \alpha = \frac{g'(1,80) - f'(1,80)}{1 + g'(1,80) \cdot f'(1,80)}$$

$$\alpha \approx 24,64^\circ$$

Der gesuchte Winkel ist der Gegenwinkel β von α :

$$\beta = 1 - \alpha \approx 155,36^\circ$$



Edit Aktion Interaktiv
 {x=1.56}
 Define f(x)=-0.1128x^4-0.0 done
 Define d1g(x)=d/dx(g(x)) done
 Define d1f(x)=d/dx(f(x)) done

$$\frac{d1f(1.80)-d1g(1.80)}{1+d1g(1.80) \times d1f(1.80)}$$

$$\frac{8072149}{17596490}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{8072149}{17596490}\right)$$
 24.64264277
 Algeb Standard Reell 360°

Abb. 2: Ableitung: Keyboard → Math2

Die obere Begrenzungslinie der Portalöffnung trifft in einem Winkel der Größe $\approx 155^\circ$ auf die rechte Begrenzungslinie der Portalöffnung.

1.3 ► Inhalt der zu sanierenden Fläche berechnen

Die zu sanierende Fläche setzt sich zusammen aus den beiden Seitenwänden, also den beiden Rechtecken mit den Seitenlängen $l = 3,100$ und $|F_2S_2|$, und der Deckenfläche, bei der es sich um ein gewölbtes Rechteck mit den Seitenlängen $l = 3,100$ und der Länge der Begrenzungslinie der Portalöffnung zwischen S_1 und S_2 mit $b = 5,09$ handelt.

$$\begin{aligned}
 |F_2S_2| &= \sqrt{(1,80 - 1,56)^2 + (2,40 - 0)^2} \\
 &\approx 2,41
 \end{aligned}$$

Für den Inhalt der beiden Seitenflächen ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
 A_1 &\approx 2,41 \text{ m} \cdot 3.100 \text{ m} \\
 &= 7.471 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Für die Deckenfläche folgt:

$$\begin{aligned}
 A_2 &= 5,09 \text{ m} \cdot 3.100 \text{ m} \\
 &= 15.779 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Die gesamte zu sanierende Fläche besitzt also einen Inhalt der Größe:

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \cdot A_1 + A_2 \\
 &\approx 30.721 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

1.4 ► Flächeninhalt der Frontfläche berechnen

Die Frontfläche setzt sich zusammen aus:

- zwei Rechtecken mit dem jeweiligen Flächeninhalt A_R ,
- zwei Dreiecken mit dem jeweiligen Flächeninhalt A_D
- und der Fläche oberhalb der oberen Begrenzungslinie mit dem Flächeninhalt A_O .

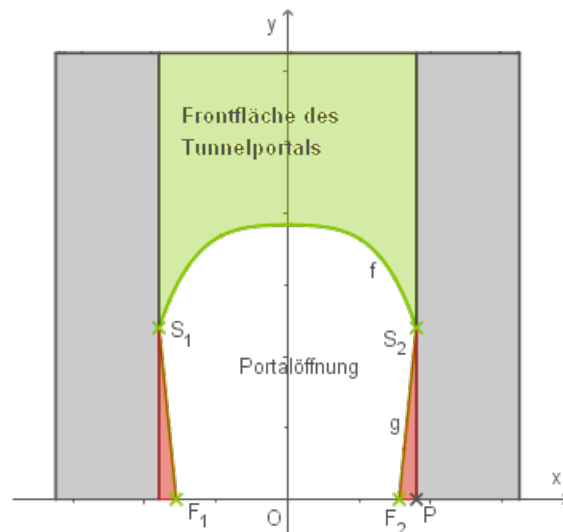


Abb. 3: Skizze

1. Schritt: Flächeninhalt der Rechtecke berechnen

Die beiden Rechtecke bilden gemeinsam ein Rechteck, mit der Höhe der Frontfläche als einer Seitenlänge $a = 6,24 \text{ m}$. Die zweite Seitenlänge ergibt sich über die Breite der Frontfläche wie folgt:

$$\begin{aligned}
 6,48 \text{ m} - 2 \cdot x_{S_2} \text{ m} &= 6,48 \text{ m} - 2 \cdot 1,80 \text{ m} \\
 &= 2,88 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt ergibt sich daher:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot A_R &= 6,24 \text{ m} \cdot 2,88 \text{ m} \\
 &= 17,9712 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

2. Schritt: Flächeninhalt der Dreiecke berechnen

Das rechte Dreieck wird beispielsweise von den Punkten S_2 , F_2 und $P(x_{S_2} | 0)$ gebildet. Bei P

besitzt das Dreieck einen rechten Winkel. Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich daher zu:

$$\begin{aligned}
 A_D &= \frac{1}{2} \cdot |\overline{F_2P}| \cdot |\overline{S_2P}| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot |x_{S_2} - x_{F_2}| \cdot y_{S_2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 0,24 \text{ m} \cdot 2,40 \text{ m} \\
 &= 0,288 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

3. Schritt: Inhalt der Fläche oberhalb der oberen Begrenzungslinie berechnen

Die Frontfläche ist **6,24** Meter hoch. Die Frontfläche wird nach oben hin also durch die Gerade k mit der Gleichung $y = 6,24$ begrenzt. Der noch fehlende Flächeninhalt entspricht also dem Inhalt der Fläche zwischen dieser Gerade und dem Graphen von f für $x_{S_1} \leq x \leq x_{S_2}$, also $-1,80 \leq x \leq 1,80$.

Dieser Flächeninhalt kann mit Hilfe eines Integrals über die Differenzfunktion $k - f$ in den Grenzen $a = -1,80$ und $b = 1,80$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 A_O &= \int_{-1,80}^{1,80} (6,24 - f(x)) \, dx \quad | \text{CAS} \\
 &\approx 9,80 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

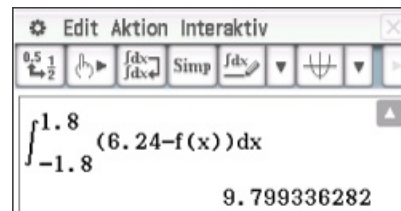


Abb. 4: Integral: Keyboard → Math2

4. Schritt: Gesamtflächeninhalt berechnen

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \cdot A_R + 2 \cdot A_D + A_O \\
 &\approx 17,9712 \text{ m}^2 + 2 \cdot 0,288 \text{ m}^2 + 9,80 \text{ m}^2 \\
 &= 28,35 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der Frontfläche des Tunnelportals beträgt ca. **28,35 m²**.

1.5 ► Verkehrsraum ermitteln

Da die gesamte Portalöffnung achsensymmetrisch ist, ist auch das zum Verkehrsraum gehörende Rechteck achsensymmetrisch. Die unteren beiden Eckpunkte des Rechtecks liegen auf der x -Achse und sind nach links und rechts durch die seitlichen Begrenzungslinien der Portalöffnungen, also durch die Punkte F_1 und F_2 begrenzt. Sie haben daher die Koordinaten

$$Q(x_Q | 0) \text{ und } R(-x_Q | 0) \text{ mit } 0 \leq x_Q \leq 1,56.$$

Für die Koordinaten der oberen beiden Punkte, die auf dem Graphen der Funktion f liegen sollen, gilt daher:

$$S(x_Q | f(x_Q)) \text{ und } T(-x_Q | f(x_Q)).$$

Die Höhe des Rechtecks ist $f(x_Q)$, die Breite $2 \cdot x_Q$. In Abhängigkeit von x_Q ergibt sich für den Flächeninhalt des Rechtecks daher:

$$A(x_Q) = f(x_Q) \cdot 2 \cdot x_Q$$

Gesucht ist nun das Maximum von $A(x_Q)$ für $0 \leq x_Q \leq 1,56$.

Mit dem notwendigen Kriterium für Extremstellen $A'(x_Q) = 0$ ergibt sich mit dem solve-Befehl des CAS:

$$A'(x_Q) = 0$$

$$x_Q \approx 1,55$$

Das hinreichende Kriterium liefert:

$$A''(1,55) \approx -18 < 0$$

Bei $x_Q \approx 1,55$ handelt es sich also um eine lokale Maximalstelle von A . Überprüfung der Intervallränder liefert:

$$A(1,55) \approx 9,298$$

$$A(0) = 0$$

$$A(1,56) \approx 9,297$$

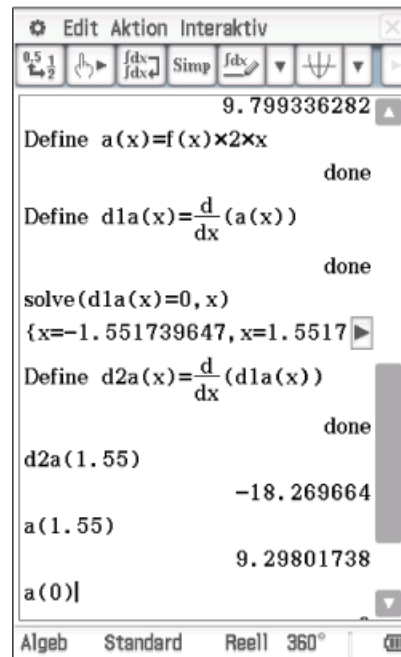


Abb. 5: Ableitung: Keyboard → Math2

Der Verkehrsraum besitzt eine Größe von ca. **9,30 m²**.

1.6 ► Wahrscheinlichkeiten berechnen

Betrachtet wird die Zufallsgröße X , die die zufällige Anzahl der Sandsteinplatten, die für die Sanierung geeignet sind, unter **130** gelieferten Sandsteinplatten beschreibt.

Unabhängig von den übrigen Sandsteinplatten ist eine zufällig ausgewählte Sandsteinplatte mit einer Wahrscheinlichkeit von **95%** für die Sanierung geeignet. Es wird nur zwischen „für die Sanierung geeignet“ und „nicht für die Sanierung geeignet“ unterschieden.

X kann daher als binomialverteilt angenommen werden mit den Parametern $n = 130$ und $p = 0,95$.

$$P(A) = P(96 \leq X \leq 120) \quad | \text{CAS}$$

$$\approx 0,1171$$

$$= 11,71 \%$$

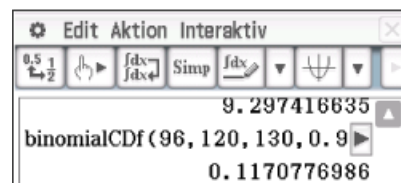


Abb. 6: Interaktiv →
Verteilungsfunktionen → Diskret →
BinomialCdf

Die Wahrscheinlichkeit für Ereignis A , also dafür, dass von den **130** gelieferten Sandsteinplatten mindestens **96** aber höchstens **120** für die Sanierung geeignet sind, beträgt ca. **11,71%**.

Die erwartete Anzahl der Sandsteinplatten, die für die Sanierung geeignet sind, entspricht dem Erwartungswert μ von X :

$$\mu = n \cdot p$$

$$= 130 \cdot 0,95$$

$$= 123,5$$

Für Ereignis B ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(X \geq 124) \quad | \text{CAS} \\
 &= 0,5245 \\
 &= 52,45\%
 \end{aligned}$$

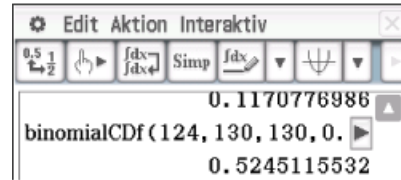


Abb. 7: Berechnung mit dem CAS

Die Wahrscheinlichkeit für Ereignis B , also dafür, dass von den **130** gelieferten Sandsteinplatten mehr Sandsteinplatten für die Sanierung geeignet sind als zu erwarten ist, beträgt ca. **52,45 %**.

1.7 ► Anzahl der Sandsteinplatten ermitteln

Betrachtet wird die Zufallsgröße X_n , die die zufällige Anzahl der für die Sanierung geeigneten Sandsteinplatten in einer Lieferung von n Sandsteinplatten beschreibt. Diese kann wie X als binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0,95$ angenommen werden.

Gesucht ist n , sodass $P(X_n \geq 125) \geq 0,99$.

Durch Ausprobieren mit dem CAS folgt:

$$\begin{aligned}
 n = 150 : \quad P(X_n \geq 125) &\approx 1,0000 \\
 n = 140 : \quad P(X_n \geq 125) &\approx 0,9982 \\
 n = 139 : \quad P(X_n \geq 125) &\approx 0,9957 \\
 n = 138 : \quad P(X_n \geq 125) &\approx 0,9905 \\
 n = 137 : \quad P(X_n \geq 125) &\approx 0,9798
 \end{aligned}$$

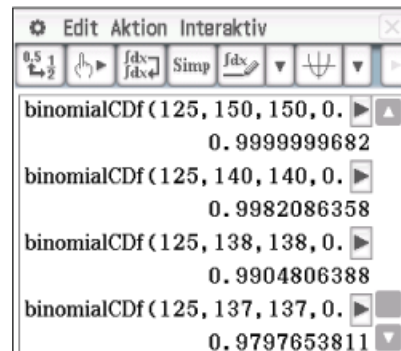


Abb. 8: Lösen durch Ausprobieren

Es müssen mindestens $n = 138$ Sandsteinplatten geliefert werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens **99 %** genug Sandsteinplatten für die Sanierung geeignet sind.

Bildnachweise [\[nach oben\]](#)

[1]-[8] © 2017 - SchulLV.