Teil A

Aufgaben PLUS Lösungen PLUS

1.1 ▶ Ableitung zuordnen

Mit der Kettenregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{3}\cdot x^3 - \sin(3\cdot x+2) \\ f'(x) &= \tfrac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 - \cos(3x+2)\cdot 3 \\ &= x^2 - 3\cos(3x+2) \end{aligned}$$

Die erste Antwortmöglichkeit ist also die richtige.

1.2 ▶ Graphen auf Asymptoten untersuchen

Bei f handelt es sich um eine gebrochenrationele Funktion. Da der Grad des Nenners größer als der des Zählers ist, besitzt der Graph von f eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y=0$ und keine weitere waagerechte Asymptote.

Der Nenner besitzt die beiden Nullstellen $x_1=-3$ und $x_2=3$. An diesen Stellen besitzt f also jeweils eine Definitionslücke. Der Graph von f besitzt daher zwei senkrechte Asymptoten mit den Gleichungen $x=-3$ und $x=3$.

Die vierte Antwortmöglichkeit ist die richtige.

1.3 ▶ Wert von a bestimmen

Der Vektor verläuft senkrecht zur Ebene, wenn er ein Normalenvektor von E ist. Ein möglicher Normalenvektor von E lässt sich aus der Ebenengleichung ablesen: $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$.

Damit der gegebene Vektor ein Normalenvektor ist, müssen er und $\vec{n}$ linear abhängig sein:

$$\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix} = b\cdot\begin{pmatrix}2\\a\\-1\end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt $b=2$. Für a folgt dann aus der zweiten Zeile $a=1$.

Die dritte Antwortmöglichkeit ist die richtige.

1.4 ▶ Wert von k bestimmen

$$\begin{pmatrix} 6 \\ k \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Zeile folgt $t = -3$. Die erste Zeile ist unabhängig von k und t und daher erfüllt. Für die zweite Zeile folgt:

$$\begin{aligned} k &= -3 - 3 \cdot 2 \\ &= -9 \end{aligned}$$

Die erste Antwortmöglichkeit ist die richtige.

1.5 ▶ **Wahrscheinlichkeit bestimmen**

Für eine Augenzahl, die größer als 8 ist, gibt es für die beiden einzelnen Würfe folgende Kombinationen:

- $3+6$
- $4+5$
- $4+6$
- $5+4$
- $5+5$
- $5+6$
- $6+3$
- $6+4$
- $6+5$
- $6+6$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $P(>8) = 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$. Die zweite Antwortmöglichkeit ist die richtige.

2.1 ▶ **Zweite Ableitungsfunktion zeigen**

Mit der Produktregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1) \cdot \mathrm{e}^x \\ f'(x) &= 1 \cdot \mathrm{e}^x + (x-1) \cdot \mathrm{e}^x \\ &= (1 + x - 1) \cdot \mathrm{e}^x \\ &= x \cdot \mathrm{e}^x \\ f''(x) &= 1 \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x \\ &= (x+1) \cdot \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

2.2 ▶ **Koordinaten des Wendespunkt angeben**

Mit dem notwendigen Kriterium für Wendepunkte $f''(x)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (x+1)\cdot \mathrm{e}^x &= 0 \qquad \mid :\mathrm{e}^x \neq 0 \\ x+1 &= 0 \qquad \mid -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

f besitzt genau eine mögliche Wendestelle bei $x=-1.$ An anderen Stellen kann der Graph von f keinen Wendepunkt besitzen, da dort das notwendige Kriterium nicht erfüllt ist.
Laut Aufgabenstellung besitzt der Graph von f genau einen Wendepunkt, dieser muss sich daher an der Stelle $x=-1$ befinden und das hinreichende Kriterium muss daher nicht mehr überprüft werden.

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1-1)\cdot \mathrm{e}^{-1} \\ &= -2\mathrm{e}^{-1} \\ &= \tfrac{-2}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f lauten $W\left(-1 \mid \tfrac{-2}{\mathrm{e}}\right)$.

3.1 ▶ **Koordinaten des Schnittpunkts berechnen**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} \qquad \mid -\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}; -t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix} &= r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} - t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcll} \mathrm{I} & 0 &=& -1r-1t & \mid +r \\ & r &=& -t & \\ \mathrm{II} & -6 &=& 3r-3t & \\ \mathrm{III} & 0 &=& 2r+2t & \end{array}$$

Einsetzen der ersten Zeile in die zweite bringt:

$$\begin{array}{llcll} \mathrm{II} & -6 &=& 3r-3t & \mid r=-t \\ & -6 &=& 3\cdot(-t)-3t & \\ & -6 &=& -6t & \mid :(-6) \\ & 1 &=& t & \end{array}$$

Also ist $r=-1.$ Durch Einsetzen in die dritte Gleichung wird die Lösung überprüft:

$$\begin{array}{lrcll} \text{III} & 0 & = & 2r+2t & \quad \mid r=-1, t=1 \\ & 0 & = & 2\cdot(-1)+2\cdot 1 & \\ & 0 & = & -2+2 & \\ & 0 & = & 0 & \end{array}$$

Die dritte Gleichung ist also auch erfüllt. Einsetzen in eine der beiden Geradengleichungen liefert den Ortsvektor von S :

$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{OS} & = & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \quad \mid t=1 \\ & = & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \\ & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden g und h lauten $S(2 \mid 2 \mid 2)$.

3.2 ▶ **Zeigen, dass sich die Geraden nicht senkrecht schneiden**

Die Geraden schneiden sich senkrecht, wenn ihre Richtungsvektoren senkrecht zueianander liegen. Dies ist der Fall, wenn das Skalarprodukt dieser Richtungsvektoren Null ist. Ist das Skalarprodukt nicht Null, liegen die beiden Vektoren nicht senkrecht zueinander.

Ein Richtungsvektor von g ergibt sich aus der Geradengleichung zu $\vec{r}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, einer von h zu $\vec{r}_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_g \circ \vec{r}_h & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & = & 1\cdot(-1)+3\cdot 3-2\cdot 2 \\ & = & 4 \neq 0 \end{array}$$

Es ist $\vec{r}_g \circ \vec{r}_h = 4 \neq 0$. Die Richtungsvektoren der beiden Geraden g und h verlaufen nicht senkrecht zueinander, die beiden Geraden also ebenfalls nicht. Sie können sich also nicht senkrecht schneiden.

4 ▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen**

Wir betrachten die Zufallsgröße $X,$ die die zufällige Anzahl der Gewinnlose unter vier gezogenen Losen beschreibt. Da jedes Los mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Drittel ein Gewinnlos ist, kann X als binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = \frac{1}{3}$ angenommen werden.
Gesucht ist dann $P(X \geq 1).$ Diese kann mit dem Gegenereignis und der Formel für die Binomialverteilung wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\
&= 1 - P(X = 0) \\
&= 1 - \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\
&= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\
&= 1 - \frac{16}{81} \\
&= \frac{65}{81}
\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{65}{81}$ befindet sich unter den vier gezogenen Losen mindestens ein Gewinnlos.