Teil A

1 Das Kreuz muss im korrekten Feld sein.

1.1 Feld 3

1.2 Feld 4

1.3 Feld 3

1.4 Feld 5

1.5 Feld 4

2 2.1 Der Graph muss eine Nullstelle an der Minimums- und an der Maximumstelle von f besitzen, sowie eine Minimumstelle an der Wendestelle. Es ist demnach eine Parabel.

2.2 Da f dritten Grades ist, ist ihre Ableitung f' eine Funktion 2. Grades und deren Ableitung f'' eine Funktion 1. Grades. Der Grad nimmt beim Ableiten um 1 ab.

3 Für ein Dreieck dürfen die Punkte nicht auf einer Geraden liegen, z. B.

$$g(A,B)\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Damit sollte man das GLS

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

lösen, was tatsächlich eine eindeutige Lösung besitzt, also liegen die Punkte auf einer Gerade und bilden somit kein Dreieck.

4 4.1 $P(rr) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \underline{\frac{7}{15}}$

4.2 X . . . Auszahlungsbetrag in €

x_i	2	3	0
$P(X = x_i)$	$\frac{42}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{46}{90}$

$$E(X) = 2 \cdot \frac{42}{90} + 3 \cdot \frac{2}{90} = 1$$

Auf lange Sicht bekommt Nora somit 1 € ausgezahlt. Deshalb sollte der Einsatz auch pro Spiel 1 € betragen.

Teil B

1 1.1 Die Höhe ist durch $f(0) = 35$ bestimmt, damit ist die Höhe $\underline{35\text{ m}}$.

Für den maximalen Durchmesser benötigen wir den Abstand der Schnittpunkte von f und g, welche mit dem CAS bestimmt werden können: $S_1(-12|17{,}5)$ und $S_2(12|17{,}5)$. Die Punkte sind auf einer Höhe, also beträgt der Abstand $d = x_{S_2} - x_{S_1} = \underline{24\text{ m}}$.

1.2
$$A = \int_{-12}^{12} f(x) - g(x)\ dx = 2 \cdot \int_{-12}^{12} f(x) - 17{,}5\ dx = 641$$

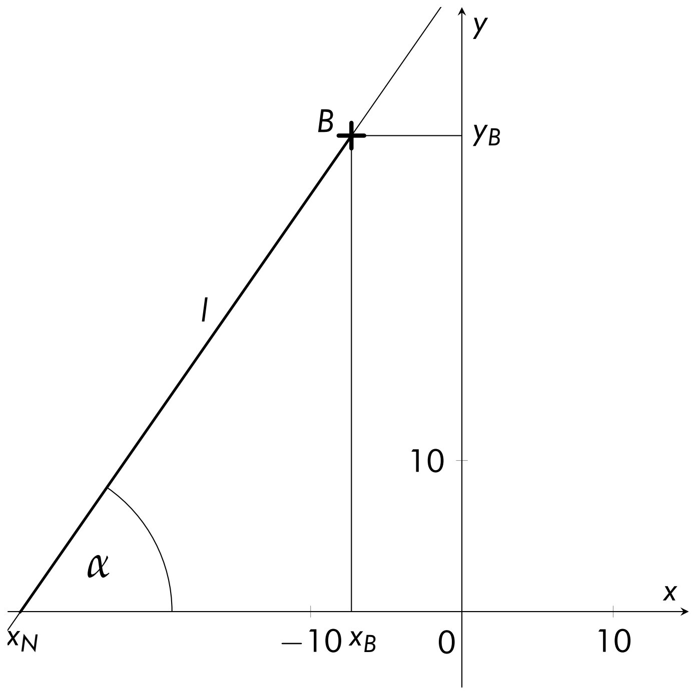
Die Querschnittsfläche beträgt $\underline{641\ \text{m}^2}$.

1.3 Wenn die Gerade tangential in die Begrenzungslinie übergeht, ist sie die Tangente der Begrenzungslinie. Demnach benötigt man die erste Ableitung von f an der Stelle $x_B = -7{,}3$:

$f'(-7{,}3) = -\dfrac{4}{1630}x^3 - \dfrac{2}{30}x \approx 1{,}44.$

Gesucht ist der Winkel α mit $\tan\alpha = -1{,}44 \rightarrow \underline{\alpha = 55{,}2°}$.

Wir betrachten das folgende Dreieck:



Dann kann die Länge l berechnet werden mit

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{y_B}{l} \\ \rightarrow l &= \frac{y_B}{\sin\alpha} \\ &= \underline{38{,}3} \end{aligned}$$

Der Aufgang ist rund $\underline{38{,}3\ \text{m}}$ lang.

1.4
$$A = \pi \cdot (r_a^2 - r_i^2) = \underline{49\ \text{m}^2},$$

wobei $r_i = |y_B| = 7{,}3$ und $r_a = r_i + 1 = 8{,}3$. Damit ergibt sich für die Kosten

$$K = 49\ \text{m}^2 \cdot 175{,}00 \frac{€}{\text{m}^2} \cdot 1{,}19 \approx \underline{10200\ €}$$

1.5 Beim Ansatz $h(t) = c \cdot a^t$ mit $c = 10^7$ und $a = 1{,}75$ folgt $h(21) = 1{,}27 \cdot 10^{12}$ für die Anzahl der Bakterien am Ende der Faulzeit.

1.6 X ... Anzahl der überladenen LKWs $\rightarrow X \sim \mathcal{B}_{60;0,15}$

$E(X) = n \cdot p = 60 \cdot 0{,}15 = \underline{9}$, es sind also 9 überladene LKWs zu erwarten.

1.7 Da wir mindestens einen überladenen LKW wollen, gilt

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) &\geq 0{,}9 \\ P(X=0) &\leq 0{,}1 \\ \binom{n}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^n &\leq 0{,}1 \\ n &\geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}85} \\ n &\leq 14{,}17 \end{aligned}$$

Es müssen demnach mindestens 15 LKWs kontrolliert werden.

2 2.1 C(-6,00 | 6,00 | 0,00), H(-6,00 | 0,00 | 5,00)

Die z-Koordinate ist offensichtlich, da sich die Spitze 7 m (2 m über der Gebäudehöhe von 5 m) befindet, da die Grundfläche in der xy-Ebene liegt. Weiterhin liegt S senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen von ABCD, da es eine gerade Pyramide ist. Es gilt $M\left(\frac{x_A + x_C}{2} \middle| \frac{y_A + y_C}{2} \middle| \frac{z_A + z_C}{2}\right)$, also M(-3,00 | 3,00 | 0,00).

2.2

$$\begin{aligned} E_{EHS}\colon \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}00 \\ 5{,}00 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3{,}00 \\ 3{,}00 \\ 2{,}00 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6{,}00 \\ 0{,}00 \\ 0{,}00 \end{pmatrix} \quad (r,s \in \mathbb{R}) \\ E_{EHS}\colon & -2y + 3z = 15 \\ E_{EFGH}\colon & z = 5 \end{aligned}$$

Dementsprechend ergibt sich der Neigungswinkel z. B.mit der ANGLE-Funktion aus dem Main-Menü als $\underline{33{,}7^\circ}$.

Seien A die Gesamtfläche des Daches und A_S der Flächeninhalt eines Teildreiecks. Dann gilt $A = 4 \cdot A_S$ und

$$A_s = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{ES} \times \overrightarrow{HS}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -3{,}00 \\ 3{,}00 \\ 2{,}00 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3{,}00 \\ 3{,}00 \\ 2{,}00 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{13} \approx 10{,}8$$

$A = 4 \cdot A_s \approx 43{,}3$, also ist der Flächeninhalt des Daches rund $\underline{43{,}3\ \text{m}^2}$ groß.

2.3 Stellen wir die Geradengleichung g für den Lichtstrahl auf

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -6{,}00 \\ 6{,}00 \\ 5{,}00 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1{,}00 \\ 3{,}00 \\ -4{,}00 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann muss gelten

$$\begin{pmatrix} -4{,}75 \\ 9{,}75 \\ 0{,}00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6{,}00 \\ 6{,}00 \\ 5{,}00 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1{,}00 \\ 3{,}00 \\ -4{,}00 \end{pmatrix},$$

was für $t = 1{,}25$ erfüllt ist. Demnach gilt $G' \in g$, also ist G' der Schattenpunkt.

Für den Schattenpunkt F' brauchen wir eine neue Gerade h mit

$$h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0{,}00 \\ 6{,}00 \\ 5{,}00 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1{,}00 \\ 3{,}00 - 4{,}00 \end{pmatrix} \quad (t | in \mathbb{R}).$$

Es muss gelten $z_F' = 5{,}00 - 4{,}00 \cdot t = 0$, also $t = 1{,}25$. Setzen wir dieses t in h ein, erhalten wir $\underline{F'(1{,}25 \mid 9{,}75 \mid 0{,}00)}$.

Die Fläche BF′G′C ist ein Parallelogramm, da gilt: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{F'G'}$ und $\overrightarrow{BF'} = \overrightarrow{CG'}$.

2.4

$$s_1\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0{,}00 \\ 2{,}00 \\ 2{,}00 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 20{,}00 \\ 6{,}00 \\ -4{,}00 \end{pmatrix}$$

$$s_2\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0{,}00 \\ 6{,}00 \\ 2{,}00 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 11{,}00 \\ -1{,}00 \\ 2{,}00 \end{pmatrix} \quad (s,r \in \mathbb{R})$$

Offensichtlich sind die RIchtungsvektoren nicht linear abhängig, da sie keine Vielfachen voneinander sind. Demnach setzen wir $s_1 = s_2$, erhalten aber keinen gemeinsamen Punkt. Demnach sind beide Geraden windschief zueinander.

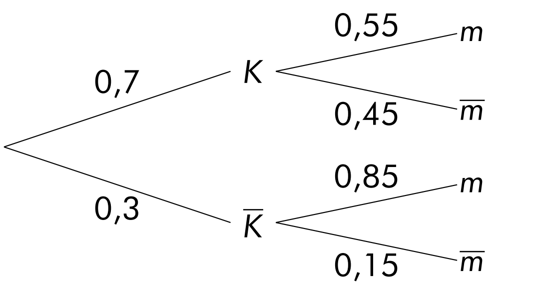
Die Länge l des zweiten Seils ergibt sich aus dem Abstands des Punkte $P_0(0{,}00 \mid 6{,}00 \mid 2{,}00)$ für $r = 0$ und $P_3(33{,}00 \mid 3{,}00 \mid 8{,}00)$ für $r = 3$.

$$l = |\overrightarrow{P_0P_3} = \sqrt{33{,}00^2 + (-3{,}00)^2 + 6{,}00^2} = \underline{33{,}7},$$

das Seil ist also rund $\underline{33{,}7\text{ m}}$ lang.

2.5 K ... Besucher ist ein Kind

m ... Besucher ist männlich



$P(m) = 0{,}7 \cdot 0{,}55 + 0{,}3 \cdot 0{,}85 = \underline{0{,}64}$

2.6 X ... Anzahl der Kinder im Klettergarten ist binomialverteilt: $X \sim \mathcal{B}_{100;0{,}7}$

H_0: $p_0 = 0{,}7$, H_A: $p_1 = 0{,}8$

Abgelehnt wird bei mehr als 77 Kindern.

Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art): $P(X \geq 78) \approx \underline{0{,}0479}$ (z. B. im CAS mittels BINOMIALCDF(78,100,100,0.7))

Fehler 2. Art (Nullhypothese wurde fälschlicherweise angenommen): $P(X \leq 77) \approx \underline{0{,}2611}$, wenn $X \sim \mathcal{B}_{100;0{,}8}$ angenommen wird (im CAS: BINOMIALCDF(0,77,100,0.8))