1 Umfang eines Kreises

Mexikos berühmtester, 2000 Jahre alter Baum steht in Santa Maria del Tule. Man bräuchte ungefähr 34 erwachsene Menschen, wenn man diesen Baum mit den Armen umfassen wollte!

Zur Erinnerung:
Ein Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt (Mittelpunkt) den gleichen Abstand (Radius) haben.

Wenn man den Umfang von Kreisen mit verschiedenen Radien misst, stellt man fest, dass der Umfang proportional zum Radius wächst. In Fig. 1 ist die Zuordnung *Durchmesser → Umfang* dargestellt.
Das Verhältnis von Umfang und Durchmesser ist demnach eine Konstante und wird mit dem griechischen Buchstaben π (gesprochen „pi") bezeichnet.

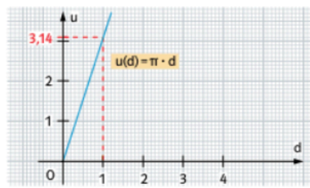


Fig. 1

Der griechische Buchstabe π kommt von peripheria (griechisch): Umfang.

Die Irrationalität von π wurde erstmals 1761 von Johann Heinrich Lambert (1728 bis 1777) bewiesen.

Es gilt $\pi = \frac{u}{d}$. Für den Umfang des Kreises erhält man durch Auflösen nach u somit
$u = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$, wobei d der Durchmesser und r der Radius des Kreises sind.
Man kann beweisen, dass die Kreiszahl π eine irrationale Zahl ist. Viele Taschenrechner geben als Näherungswert für π ungefähr 3,141592654 an.

Für den **Umfang** u eines Kreises mit Durchmesser d bzw. Radius r gilt:
$u = \pi \cdot d$ bzw. $u = 2 \cdot \pi \cdot r$. Für die **Kreiszahl** π gilt: $\pi \approx 3{,}14$.

Beispiel 1 Umfang eines Kreises
a) Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Radius 2,00 m.
b) Welchen Durchmesser hat ein Kreis mit dem Umfang 37,7 cm? Berechne.
Lösung:
a) $u = \pi \cdot d = \pi \cdot 4\,\text{m} \approx 12{,}6\,\text{m}$
Der Umfang des Kreises beträgt ca. 12,6 m.
b) $d = \frac{u}{\pi} = \frac{37{,}7\,\text{cm}}{\pi} \approx 12{,}0\,\text{cm}$
Der Durchmesser beträgt rund 12,0 cm.

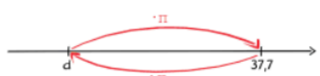


Fig. 2

Beispiel 2 Umfang einer Figur
Berechne den Umfang der Fig. 3.
Lösung:
Die Figur besteht aus einem Halbkreis mit Durchmesser 4 cm und 2 Halbkreisen mit Durchmesser 2 cm.
Umfang:
$u = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4\,\text{cm} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2\,\text{cm} \approx 12{,}6\,\text{cm}$

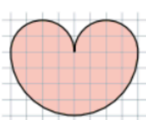


Fig. 3

Aufgaben

1 Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser d oder dem Radius r. Runde das Ergebnis sinnvoll.
a) d = 12 cm b) r = 1,8 dm c) r = 0,75 m d) $r = \frac{2}{3}$ m
e) d = 3,50 m f) r = 6,85 m g) d = 2,5 km h) r = 0,905 km

2 Welchen Radius hat ein Kreis mit dem Umfang u? Runde sinnvoll.
a) u = 1,00 m b) u = 5,6 cm c) $u = \frac{2}{3}$ m d) $u = \frac{4}{5}$ m
e) u = 6,35 m f) u = 498 km g) u = 3πm h) u = 2,375 km

3 a) Wie verändert sich der Umfang eines Kreises, wenn man seinen Radius verdoppelt (halbiert, vervierfacht, verachtfacht)?
b) Um wie viele Zentimeter vergrößert sich der Umfang eines Kreises, wenn sein Radius um 1 cm vergrößert wird?
c) Um wie viele Zentimeter wird der Durchmesser eines Kreises kleiner, wenn man den Umfang um 5 cm verkleinert?

4 Der Äquator hat eine Länge von etwa 40 000 km. Berechne die Länge des Erdradius.

5 a) Der Stamm einer Seqoia giganta (ein in der Sierra Nevada wachsender Mammutbaum) wird bis zu 10 m dick. Welchen Umfang hat ein 9,2 m dicker Stamm?
b) Wie viele Männer sind notwendig, um den Baum zu umfassen? Rechne mit einer Spannweite von ungefähr 1,80 m für jeden Mann.

Bist du sicher?

1 Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze die fehlenden Angaben.

Radius	2 m			
Durchmesser		8 cm		
Umfang			44 cm	1 m

2 Ein 6,5 cm langes Drahtstück wird so zu einem kreisförmigen Ring gebogen, dass seine Enden zusammenstoßen. Berechne den Durchmesser des Ringes.

6 a) Die Räder eines Fahrrades haben einen Durchmesser von 71 cm. Wie viele Umdrehungen macht jedes Rad pro km?
b) Bei einem Hochrad hat das Vorderrad einen Durchmesser von 1,35 m und das Hinterrad einen Durchmesser von 45 cm. Hakim behauptet: „135 : 45 = 3, also dreht sich das kleine Rad 3-mal so oft wie das große." Hat er Recht? Begründe.
c) Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 130 km/h. Wie oft dreht sich jedes Rad in einer Minute, wenn der Raddurchmesser 60 cm beträgt?
d) Die Räder der Wagen des ICE haben einen Durchmesser von 1,00 m (gemessen an der Lauffläche). Wie oft drehen sich die Räder pro Minute bei 280 km/h?

7 a) Schätzt den Umfang von kreisförmigen Begrenzungsflächen bei Gegenständen aus dem Alltag (Münzen; Dosen…).
b) Berechnet den Umfang dieser kreisförmigen Begrenzungsflächen, nachdem ihr zuvor den Durchmesser bestimmt habt.
c) Berechnet, um wie viel Prozent euer Schätzwert vom berechneten Wert abweicht. Wer erreicht die geringste prozentuale Abweichung?

8 Berechne die Länge der aus Halbkreisen zusammengesetzten Linie.

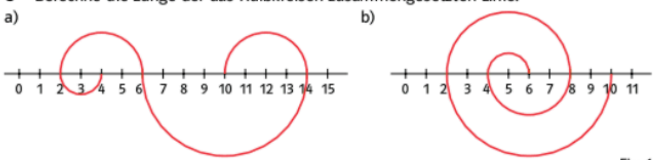


Fig. 1

9 Berechne die Gesamtlänge der Begrenzungslinien der Figur.

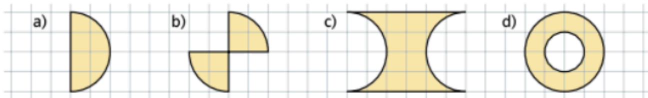


Fig. 2

10 Die Raumfähre COLUMBIA umkreiste bei ihrem ersten Flug im Jahr 1981 die Erde in einer Flughöhe von 275 km. Eine Umkreisung dauerte 1,5 Stunden. Berechne die Geschwindigkeit auf der Umlaufbahn. Rechne mit 6370 km für den Erdradius.

11 Der Fernsehsatellit ASTRA steht scheinbar am Himmel still, da er die Erde in genau 24 Stunden in Richtung der Erddrehung umkreist (Fig. 3). Sein Abstand von der Erdoberfläche beträgt 35 900 km, der Erdradius 6370 km. Berechne die Geschwindigkeit des Satelliten in $\frac{km}{h}$ auf seiner Bahn.

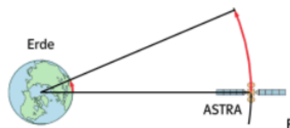


Fig. 3

12 Der Abwurfkreis beim Diskuswerfen hat einen Durchmesser von 2,50 m (Fig. 4). Er ist von einem 70 mm hohen Blechstreifen umschlossen.
a) Wie lang ist dieser Blechstreifen?
b) Berechne den Flächeninhalt des Streifens.

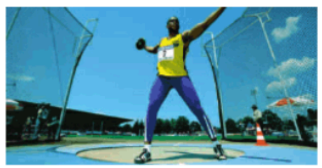


Fig. 4

13 Fig. 5 zeigt die Trommel eines Schlauchwagens.
a) Berechne, wie viel m Schlauch in der untersten Lage ungefähr aufgerollt werden können.
b) Berechne, wie viel m Schlauch ungefähr in der zweiten Lage aufgerollt sein können.

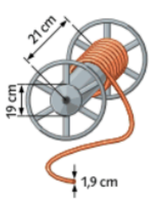


Fig. 5

14 a) Nimm an, ein Seil würde um den Äquator gelegt, um 2 m verlängert und dann gespannt (Fig. 6). Könnte eine Maus darunter hindurchkriechen? Berechne dazu die Differenz der Radien R und r in Fig. 6.
b) Rechne a) auch für eine Münze. Was stellst du fest? Verallgemeinere deine Feststellung, indem du allgemein mit der Variablen r rechnest.

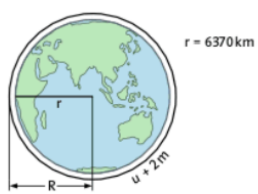


Fig. 6

2 Flächeninhalt eines Kreises

Familie Sommer möchte ihren quadratischen Esstisch durch einen runden Tisch ersetzen.
Herr Sommer: „Für jedes Familienmitglied muss aber weiterhin ein Meter Platz am Tisch sein."
Frau Sommer: „Hoffentlich passt dann auch noch genauso viel auf den Tisch."

Bisher sind nur Verfahren zur Berechnung geradlinig begrenzter Flächen behandelt worden. Um nun den Flächeninhalt eines Kreises zu bestimmen, kann man diesen vom Mittelpunkt aus in kongruente Abschnitte aufteilen, von denen einer zusätzlich noch halbiert wird. Man kann dann diese Kreisteile zu einer annähernd rechteckigen Fläche zusammenlegen (Fig.1). Je größer die Anzahl der Kreisteile ist, desto mehr nähert sich die Fläche einem Rechteck an.

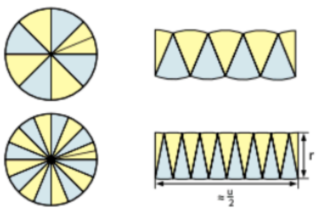


Fig. 1

Bei einer Aufteilung des Kreises in unendlich viele Kreisteile würde ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b entstehen, für das gilt:
– a ist halb so groß wie der Umfang des Kreises, also $a = \frac{u}{2}$.
– b entspricht dem Radius des Kreises, also $b = r$.
Da $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ gilt, lässt sich der Flächeninhalt des Rechtecks und damit auch der des Kreises wie folgt berechnen:
$A_{Kreis} = A_{Rechteck} = a \cdot b = \frac{u}{2} \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} \cdot r = \pi \cdot r^2$.

Für den **Flächeninhalt** A eines Kreises mit dem Radius r gilt: $A = \pi \cdot r^2$

$A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2$

Beispiel 1
a) Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser $d = 7{,}20\,m$.
b) Berechne den Radius eines Kreises mit dem Flächeninhalt $A = 2{,}5\,cm^2$.
Lösung:
a) $r = \frac{d}{2} = 3{,}60\,m$; $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3{,}60\,m)^2 = 12{,}96\,\pi\,m^2 \approx 40{,}8\,m^2$
b) $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{2{,}5\,cm^2}{\pi}} \approx 0{,}89\,cm$

Beispiel 2
Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Kreises, wenn der Radius verdoppelt wird?
Lösung:
$r_2 = 2 \cdot r_1$; $A_2 = \pi \cdot r_2^2 = \pi \cdot (2 \cdot r_1)^2 = \pi \cdot 4 \cdot r_1^2 = 4 \cdot \pi \cdot r_1^2 = 4 \cdot A_1$
Der Flächeninhalt vervierfacht sich.

Aufgaben

1 Ein Kreis hat den Radius r bzw. den Durchmesser d. Berechne den Flächeninhalt des Kreises. Runde das Ergebnis sinnvoll.

a) $r = 4{,}80\,m$ b) $d = 15\,dm$ c) $d = 3{,}7\,dm$ d) $r = 25\,cm$
e) $r = \frac{2}{3}\,m$ f) $d = 1{,}3\,cm$ g) $r = 2{,}35\,m$ h) $d = 15\,km$

2 Berechne den Radius r und damit den Durchmesser d für einen Kreis mit dem Flächeninhalt A. Runde sinnvoll.

a) $A = 1{,}00\,m^2$ b) $A = 1{,}20\,dm^2$ c) $A = 60\,cm^2$ d) $A = 0{,}785\,a$
e) $A = 121\,\pi\,cm^2$ f) $A = 5{,}29\,\pi\,m^2$ g) $A = \frac{\pi}{4}\,km^2$ h) $A = 2\pi\,cm^2$

3 Übertrage die Tabelle ins Heft und berechne die fehlenden Größen.

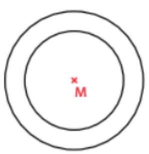
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
r	17 cm						
d			9,1 mm			7,543 m	
u		3,2 m			1,543 km		
A				$13\,cm^2$			$1{,}3\,km^2$

Bist du sicher?

1 Berechne den Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Radius r (Durchmesser d).

a) $r = 25\,cm$ b) $d = 7{,}5\,dm$ c) $d = 1{,}3\,m$ d) $r = \frac{5}{6}\,m$

2 Wie ändert sich der Flächeninhalt eines Kreises, wenn man seinen Durchmesser vervierfacht?



*Zwei Kreise sind **konzentrisch**, wenn sie denselben Mittelpunkt besitzen.*

4 a) Der Radius eine Kreises wird verdreifacht (halbiert; verfünffacht). Wie verändert sich der Flächeninhalt?
b) Zu einem Kreis mit dem Radius r = 10 cm soll ein konzentrischer Kreis mit doppelt so großem Flächeninhalt gezeichnet werden. Berechne den Radius dieses Kreises.
c) Der Flächeninhalt eines Kreises wird verdreifacht. Zeige, dass der neue Radius das $\sqrt{3}$-fache des ursprünglichen Radius beträgt.

5 Aus einem quadratischen Blech wird eine möglichst große Kreisscheibe gestanzt. Das Blechstück hat eine Seitenlänge von 25 cm. Wie groß ist die Fläche des Abfalls?

6 a) Aus einer quadratischen Platte mit der Seitenlänge a wird eine Kreisscheibe wie in Fig. 1 herausgeschnitten. Wie viel Prozent beträgt die Fläche des Abfalls?
b) Eine Gruppe schneidet aus einer quadratischen Platte wie in Fig. 2 vier gleich große Kreisscheiben heraus, eine andere Gruppe schneidet neun solcher Kreisscheiben heraus. Wie viel Prozent beträgt jeweils die Fläche des Abfalls?
Stellt für n^2 herausgeschnittene Kreisscheiben einen Term für die Fläche des Abfalls auf.

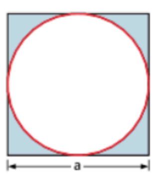


Fig. 1

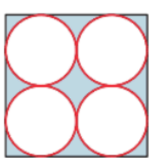


Fig. 2

7 a) Das Verkehrsschild in Fig. 1 hat einen Durchmesser von 60 cm. Berechne seinen Flächeninhalt.
b) Ein kreisförmiger Tisch hat einen Durchmesser von 1,10 m. Berechne die Kantenlänge eines flächengleichen quadratischen Tisches.

Fig. 1

8 Ein Rotor einer Windkraftanlage mit einem Durchmesser von 43 m besitzt eine sogenannte Winderntefläche von $1452\,m^2$. Berechne die Winderntefläche einer Anlage mit einem Rotordurchmesser von 25 m.

9 Von einem 1,30 m breiten Stoffballen ist eine Tischdecke für einen runden Tisch aus einem Stück zuzuschneiden. Die Tischplatte hat einen Durchmesser von 90 cm, die Tischdecke soll rundum 15 cm überhängen. Berechne den minimalen Abfall in Prozent, wenn man vom Ballen für die Decke ein rechteckiges Stück Stoff abschneidet.

Fig. 2

10 Berechne den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.

11 In einer Pizzeria kostet eine kleine kreisförmige Pizza Margherita 7,00 € und eine große kreisförmige Pizza Margherita 9,00 €. Nimm an, die Preise sind proportional zu den Flächeninhalten. Berechne, welchen Durchmesser dann die große Pizza hat, wenn die kleine Pizza einen Radius von 11 cm besitzt.

Fig. 3

Informiere dich über die Preise von Pizzen in verschiedenen Größen in Pizzerien und bei Pizza-Lieferanten in deiner Umgebung. Untersuche, ob große Pizzen im Verhältnis günstiger sind als kleine.

12 Begründe anhand Fig. 4, dass für den Flächeninhalt A eines Kreises mit dem Radius r die Ungleichung $2 \cdot r^2 < A < 4 \cdot r^2$ gilt.

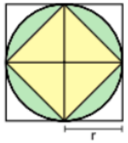


Fig. 4

13 Bestimme den Flächeninhalt der Figur (1 Kästchenlänge entspricht 0,5 cm).

3 Kreisteile

In der Architektur verwendet man oft nur Teile von Kreisen, sogenannte Kreisbögen. Je nach Lage der Kreismittelpunkte spricht man in der gotischen Architektur von normalen Spitzbögen, gedrückten Spitzbögen, überhöhten Spitzbögen, Kleeblattbögen usw.

Die in Fig. 1 rot gefärbten Flächen bezeichnet man als **Kreisausschnitte** oder **Kreissektoren**, die Winkel α als **Zentriwinkel** und die zugehörigen Teile der Kreislinie als **Kreisbögen**.

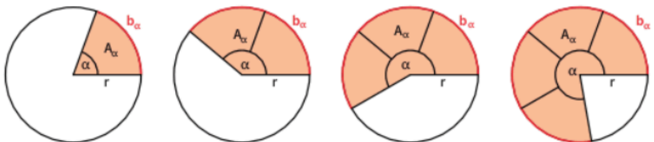
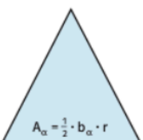


Fig. 1

In Fig. 1 erkennt man: Der Flächeninhalt A_α des Kreisausschnittes und die Länge b_α des Bogens sind proportional zum Zentriwinkel α.
Demnach kann man die Bogenlänge b_α und den Flächeninhalt A_α eines Kreisausschnitts mit den bekannten Formeln für den gesamten Kreis und dem Dreisatz berechnen.



Die Formel lässt sich besonders leicht merken, wenn man einen Kreisausschnitt als „Dreieck" mit gekrümmter Grundseite ansieht.

: 360   · 47

Zentriwinkel α	360°	1°	z. B. 47°	allgemeines α
Länge b_α des Kreisbogens	$2\pi r$	$2\pi r \cdot \frac{1°}{360°}$	$2\pi r \cdot \frac{47°}{360°}$	$2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$
Flächeninhalt A_α des Kreisausschnitts	πr^2	$\pi r^2 \cdot \frac{1°}{360°}$	$\pi r^2 \cdot \frac{47°}{360°}$	$\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$

: 360   · 47

Durch Einsetzen der nach α umgestellten Formel für b_α in die Formel für A_α ergibt sich:
$A_\alpha = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{360° \cdot b_\alpha}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot 360°} = \frac{1}{2} \cdot b_\alpha \cdot r.$

Für den **Kreisausschnitt** eines Kreises mit dem Radius r und dem Zentriwinkel α gelten für den Flächeninhalt A_α und die **Kreisbogenlänge** b_α

$$A_\alpha = \frac{\alpha}{360°} \pi r^2,$$
$$b_\alpha = \frac{\alpha}{180°} \pi r$$

und damit $\quad A_\alpha = \frac{1}{2} b_\alpha r.$

Beispiel 1
Berechne für einen Kreis mit $r = 5\,\text{cm}$ die Bogenlänge $b_{54°}$ und den Flächeninhalt $A_{54°}$.
Lösung:
$b_{54°} = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180°} = \pi \cdot 5\,\text{cm} \cdot \frac{54°}{180°} \approx 4{,}71\,\text{cm}$ $\quad A_{54°} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \pi \cdot (5\,\text{cm})^2 \cdot \frac{54°}{360°} \approx 11{,}8\,\text{cm}^2$

Beispiel 2
Berechne die Größe des Zentriwinkels, der zu einem Bogen mit $b_\alpha = 24{,}0\,\text{cm}$ und $r = 8{,}0\,\text{cm}$ gehört.
Lösung:
Aus $b_\alpha = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180°}$ folgt $\alpha = \frac{b_\alpha \cdot 180°}{\pi \cdot r} = \frac{24{,}0\,\text{cm} \cdot 180°}{\pi \cdot 8{,}0\,\text{cm}} \approx 172°.$

Aufgaben

1 Berechne für den Kreis mit dem Radius r die Bogenlänge b_α und den Flächeninhalt A_α des Kreisausschnitts mit dem Zentriwinkel α.
a) $r = 9{,}0\,\text{cm}$; $\alpha = 30°$ b) $r = 9{,}0\,\text{cm}$; $\alpha = 60°$ c) $r = 18{,}0\,\text{dm}$; $\alpha = 60°$
d) $r = 18{,}0\,\text{cm}$; $\alpha = 18°$ e) $r = 6{,}0\,\text{cm}$; $\alpha = 150°$ f) $r = 12{,}0\,\text{cm}$; $\alpha = 113°$

2 Berechne den Flächeninhalt eines Kreisausschnitts mit $r = b_\alpha = 1{,}00\,\text{m}$.

3 Berechne zu einem Kreis mit dem Radius r den Zentriwinkel α des Bogens der Länge b_α.
a) $r = 4{,}5\,\text{cm}$; $b_\alpha = 5{,}0\,\text{cm}$ b) $r = 1{,}40\,\text{m}$; $b_\alpha = 1{,}00\,\text{m}$ c) $r = 3{,}5\,\text{cm}$; $b_\alpha = 10{,}0\,\text{cm}$

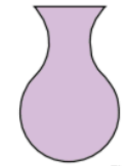


Fig. 1

Die Radien aller Kreisbögen dieser Figur sind gleich r. Wie kann man die Fläche mit zwei geradlinigen Schnitten so zerlegen, dass man die entstehenden Stücke zu einem Quadrat der Seitenlänge 2r zusammensetzen kann?

Bist du sicher?

1 Bestimme für einen Kreisausschnitt mit dem Flächeninhalt A_α, Bogenlänge b_α, Kreisradius r und dem Zentriwinkel α die jeweils fehlenden Größen.
a) $r = 4\,\text{cm}$; $\alpha = 30°$ b) $r = 6\,\text{cm}$; $b_\alpha = 2{,}5\,\text{cm}$ c) $A_\alpha = 60\,\text{dm}^2$; $r = 13{,}8\,\text{dm}$

4 a) Ein Kreisausschnitt hat den Radius 4,5 cm und den Zentriwinkel 147°.
Wie groß ist sein Flächeninhalt, wie viel Prozent der Kreisfläche sind das? Wie lang ist der Kreisbogen?
b) Ein Kreisausschnitt mit der Bogenlänge 14 cm hat den Zentriwinkel 37°.
Wie groß sind sein Radius und sein Flächeninhalt?
c) Ein Kreisausschnitt mit dem Flächeninhalt $79\,\text{m}^2$ hat den Zentriwinkel 220°.
Berechne den Radius und die Bogenlänge.
d) Welchen Flächeninhalt und Umfang hat „Pacman" (Fig. 2) bei einem Radius von 2 cm?

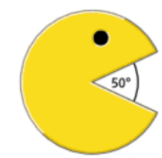


Fig. 2

5 Berechne die fehlenden Größen für einen Kreisausschnitt.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
r	2,4 m	3,5 cm	1,2 km			
α	320°			123°	213°	
b_α		16 cm		4 dm		12 cm
A_α			$0{,}9\,\text{km}^2$		$20\,\text{m}^2$	$40\,\text{cm}^2$

6 Überprüfe folgende Aussagen:
a) Verdoppelt man den Zentriwinkel, verdoppelt sich die zugehörige Kreisbogenlänge.
b) Zum vierten Teil des Zentriwinkels gehört der vierte Teil der Fläche des Kreisausschnitts.
c) Vervierfacht man bei gleichbleibendem Zentriwinkel den Radius, so vervierfacht sich die Länge des Kreisbogens.

7 Eine Schiffsschaukel in einem Erlebnispark hat eine Armlänge von 17 m. Von der Senkrechten schlägt sie um 35° aus. Welchen Weg legt man bei 20 vollen Hin- und Herbewegungen der Schaukel zurück?

8 a) Stelle die Formeln für den Flächeninhalt und den Bogen des Kreisausschnitts so um, dass sich mit der umgestellten Formel der Winkel bzw. der Radius berechnen lässt. Prüfe mithilfe von Zahlenbeispielen, ob deine umgestellten Formeln richtig sein können.
b) Überlege dir Aufgaben, bei denen man die Formeln aus a) benötigt. Dies können einfache Flächenberechnungen in einer gezeichneten Figur oder auch Textaufgaben sein. Lass deinen Tischnachbarn die Aufgaben lösen.

Begründe die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreisringes.

9 Fig. 1 zeigt einen **Kreisring**. Für seinen Flächeninhalt A gilt $A = \pi(r_A^2 - r_I^2)$. Berechne den Flächeninhalt eines Kreisrings mit
a) $r_A = 2{,}2\,\text{cm}$; $r_I = 2\,\text{cm}$,
b) $r_A = 3{,}75\,\text{m}$; $r_I = 3{,}25\,\text{m}$,
c) $r_A = 1\,\text{m}$; $r_I = 10\,\text{cm}$.

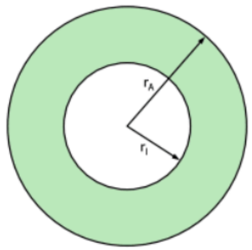


Fig. 1

10 Ein Kreisring hat einen Flächeninhalt von 63 cm². Der
a) Außenradius, b) Innenradius
beträgt 5 cm. Berechne jeweils den anderen Radius.

11 a) Welche Fläche überstreicht das Wischerblatt des abgebildeten Scheibenwischers (Fig. 2)?
b) Welchen Zentriwinkel müsste dieser Scheibenwischer erhalten, wenn mindestens 0,45 m² Fläche überstrichen werden sollen?

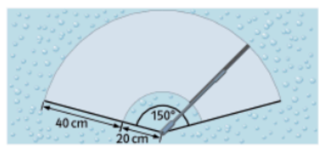


Fig. 2

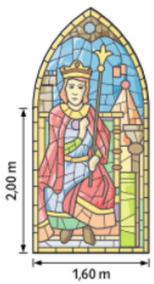
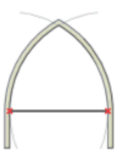


Fig. 3

12 Der normale Spitzbogen eines gotischen Fensters besteht aus zwei Kreisbögen mit gleichem Radius. Berechne den Flächeninhalt des in Fig. 3 abgebildeten Fensters. Beachte dazu die Lage der Mittelpunkte der Kreisbögen bei normalen Spitzbögen (Fig. 4)


Normaler Spitzbogen
Fig. 4

Info

Den in Fig. 5 farbig markierten Flächenanteil eines Kreises nennt man **Kreisabschnitt**. Die Strecke $s = \overline{QP}$ heißt Sehne, h heißt Höhe des Kreisabschnitts.
Zur Berechnung des Flächeninhalts des Kreisabschnitts subtrahiert man den Flächeninhalt des Dreiecks MPQ vom Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnitts. Daher ist
$A = \pi r^2 \frac{\alpha}{360°} - \frac{1}{2}s(r - h)$.

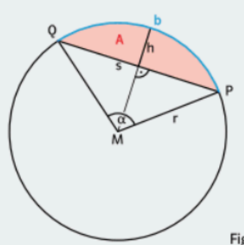


Fig. 5

13 a) Ein Kreisabschnitt hat den Zentriwinkel 50° und den zugehörigen Radius 7 cm. Ermittle seinen Flächeninhalt.
b) Ein Fenster hat die Form eines Kreisabschnitts. Die Bogenlänge beträgt 1,5 m, der zugehörige Kreisradius 1,3 m.
Ermittle die Fensterfläche. Wie breit und wie hoch ist das Fenster?

Tipp zu Aufgabe 13: *Ermittle die Länge der Sehne konstruktiv.*

14 Eratosthenes (etwa 284 – 200 v. Chr.) bestimmte den Zentriwinkel α des Bogens auf dem Erdmeridian von Syene (heute Assuan) bis Alexandria. Mit diesem Winkel und der Entfernung beider Orte berechnete er den Erdumfang.
Am Tag des Sommeranfangs schien die Sonne mittags in Syene bis auf den Boden eines tiefen Brunnens. Zur gleichen Zeit warf ein lotrecht aufgestellter Stab in Alexandria einen Schatten. Aus der Schattenlänge wurde α bestimmt (Fig. 1).
a) Erklärt mithilfe von Fig. 1, wieso sich durch die oben beschriebene Methode der Zentriwinkel bestimmen lässt.
b) Für α ist der Wert 7,2° überliefert.
Berechnet daraus den Umfang der Erde in Stadien und in km (1 Stadion betrug etwa 157,2 m).
c) Um wie viel Prozent weicht das Ergebnis aus b) von dem tatsächlichen Erdumfang ab?

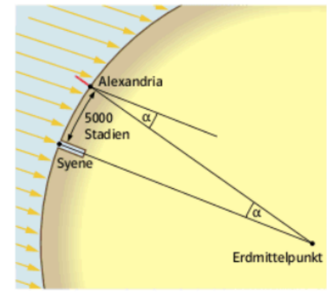


Fig. 1

Informiert euch über Eratosthenes. Er hat viele interessante Entdeckungen gemacht, z. B. ist das „Sieb des Eratosthenes“ nach ihm benannt. Vielleicht möchtet ihr zu zweit ein Referat darüber halten.

15 a) Welchen Flächeninhalt und welchen Umfang hat die „Fledermaus“ (Fig. 2) für $r = 2{,}4\,\text{cm}$ und $\alpha = 60°$?
b) Wie groß muss der Radius r bei $\alpha = 60°$ sein, damit die Figur den Flächeninhalt 30 cm² hat?
c) Wie groß muss der Winkel α bei $r = 4\,\text{cm}$ sein, damit die Figur den Flächeninhalt 40 cm² hat?

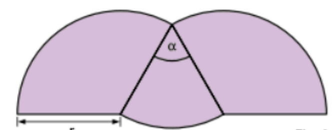


Fig. 2

16 a) Ermittle eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts der braun gefärbten Fläche in Fig. 3.
b) Ermittle eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts der gelben Fläche (Fig. 3).
c) Zeige, dass das gelbe „Kreiszweieck“ und das braune „Kreisdreieck“ flächengleich sind. Nutze eventuell ein CAS.

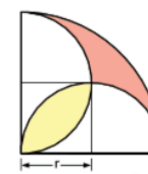


Fig. 3

Kannst du das noch?

17 Berechne die Lösungsmengen der Gleichungen.
a) $|x - 7| = 9$ b) $x \cdot (2x - 8) = 0$ c) $\frac{6}{x-5} = \frac{3}{4}$ d) $x^2 + 8 = 6x$

18 Eine Digitalkamera kostet 250 €. Der Preis wird zunächst um 20 % gesenkt und später um 10% heraufgesetzt. Wie teuer ist das Gerät nach diesen beiden Preisänderungen?

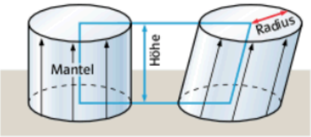
4 Kreiszylinder

„Warum bringst du vier Plakate mit? Wo sollen die denn alle hin?"

„Wieso? Das sind doch sicher noch zu wenige!"

kylindros (griech.): *Walze, Rolle*

Kreiszylinder sind Körper, die man sich durch Verschieben einer Kreisfläche im Raum entstanden denken kann. Erfolgt die Verschiebung senkrecht zum Kreis, erhält man einen geraden Kreiszylinder.
Wie beim Prisma nennt man den Abstand zwischen Grund- und Deckfläche die **Höhe**.



gerader Zylinder „schiefer" Zylinder

Ein gerader Kreiszylinder ist also ein Körper, der begrenzt wird von zwei zueinander parallel liegenden, kongruenten Kreisflächen und einer gekrümmten Mantelfläche, die abgewickelt ein Rechteck ergibt (Fig. 1). Die Gerade durch die Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche heißt **Achse** des Zylinders und jede Verbindungsstrecke zwischen Grund- und Deckfläche, die auf dem Mantel des Zylinders verläuft, wird als **Mantellinie** bezeichnet.

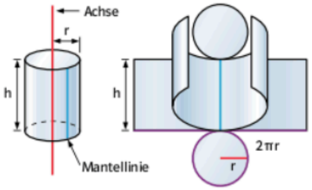


Fig. 1

ellipse (griech.): *Mangel*

Bei der Konstruktion des Schrägbildes eines liegenden Zylinders (Grundfläche parallel zur Bildebene) werden Grund- und Deckfläche in wahrer Größe als Kreis und die Höhe als Hilfslinie um den Winkel und den Faktor k verzerrt dargestellt (Fig. 2). Im Schrägbild eines stehenden Zylinders wird die Höhe in wahrer Länge gezeichnet, dagegen werden Grund- und Deckfläche verzerrt dargestellt. Das Schrägbild eines Kreises nennt man **Ellipse** (Fig. 3). In Fig. 4 sieht man Zweitafelbilder ein und desselben geraden Kreiszylinders in verschiedenen Lagen bezüglich der Bildebenen.

Informiere dich ausführlicher über das Zeichnen des Schrägbildes eines Kreises. Nutze z. B. das Internet.

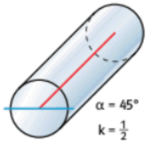


Fig. 2

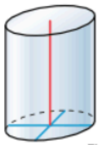


Fig. 3

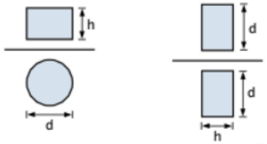


Fig. 4

Wie aus Lerneinheit 2 bekannt ist, hat die Fläche eines Kreises mit dem Radius r und dem Umfang u den gleichen Flächeninhalt wie ein Rechteck mit den Seitenlängen r und $0{,}5 \cdot u$ (Fig. 1).
Entsprechend kann man einen Zylinder zerlegen und die Teile wie in Fig. 2 zu einem Körper zusammensetzen, der bei immer feinerer Einteilung immer mehr die Form eines Quaders annimmt.
Die Grundfläche des Quaders hat den gleichen Flächeninhalt wie die Grundfläche des Zylinders. Da beide Körper die gleiche Höhe haben, gilt für das **Volumen** des Zylinders: $V = A_G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

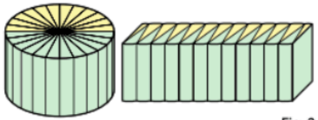


Fig. 2

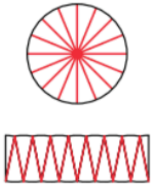


Fig. 1

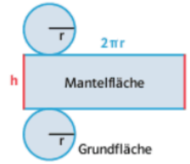
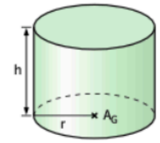


Fig. 3

Der **Oberflächeninhalt** des Zylinders ist aus dessen Netz (Fig. 3) berechenbar. Er besteht aus den Flächeninhalten der Grund- und Deckfläche sowie der Mantelfläche.
Es gilt: $A_O = 2 \cdot A_G + A_M$.
Die Mantelfläche hat die Seitenlängen $2 \cdot \pi \cdot r$ und h, also ist $A_M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$.

Ein Zylinder mit dem Radius r, der Grundfläche A_G und der Höhe h hat das Volumen
$\mathbf{V = A_G \cdot h = \pi r^2 \cdot h}$.
Ist A_M die Mantelfläche des Zylinders, dann ist
$\mathbf{A_M = 2\pi r \cdot h}$.
Für die Oberfläche A_O des Zylinders gilt
$\mathbf{A_O = 2A_G + A_M = 2\pi r(r + h)}$.



$A_O = 2 \cdot A_G + A_M$
$= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
$= 2\pi r(r + h)$

Beispiel
In Fig. 4 ist das Zweitafelbild eines zylindrischen Bolzens aus Stahl (Dichte: $\rho = 7{,}8\,\frac{g}{cm^3}$) im Maßstab 1 : 4 gegeben. Berechne
a) die Masse
b) den Oberflächeninhalt des Bolzens.
Lösung:
Aus dem Zweitafelbild ist entnehmbar: $r = 2\,cm$; $h = 12\,cm$; die Masse berechnet man aus der Dichte mit der Formel $m = \rho \cdot V$.
a) $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 7{,}8\,\frac{g}{cm^3} \cdot \pi \cdot (2\,cm)^2 \cdot 12\,cm \approx 1176\,g$
b) $A_O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h) = 2 \cdot \pi \cdot 2\,cm \cdot (2\,cm + 12\,cm) \approx 176\,cm^2$

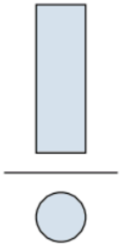


Fig. 4

Aufgaben

1 Von einem Zylinder sind der Radius r und die Höhe h gegeben. Berechne sein Volumen, den Flächeninhalt der Mantelfläche sowie den Oberflächeninhalt.
a) r = 12 cm; h = 60 cm b) r = 8 cm; h = 2,6 dm c) r = 45 cm; h = 1,2 m
d) r = 24 m; h = 5,5 cm e) r = 2,4 mm; h = 27 mm f) r = 3,8 mm h = 12,5 m

2 Gegeben ist in Fig. 1 das Zweitafelbild eines Kreiszylinders im Maßstab 1 : 2.
a) Zeichne das Zweitafelbild des Kreiszylinders in einer anderen Lage.
b) Skizziere das Netz und konstruiere ein Schrägbild des Zylinders.
c) Berechne Volumen und Oberflächeninhalt des Kreiszylinders.

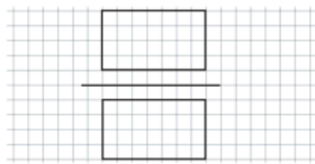
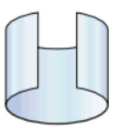


Fig. 1

3 Der 53 km lange Eisenbahntunnel zwischen England und Frankreich besteht aus zwei Röhren von 8 m Durchmesser für die Züge und einen Versorgungstunnel von 5 m Durchmesser. Berechne, wie viel Kubikmeter Abraum beim Bohren dieser drei Röhren angefallen sind. Berechne, wie viele Lkw-Ladungen zu 12 m^3 das sind.

4 Eine zylindrische Regentonne hat innen einen Durchmesser von 60 cm und eine Höhe von 85 cm.
a) Berechne, wie viel Liter Wasser die Tonne fasst.
b) In der Regentonne befinden sich im Moment 150 Liter Wasser. Berechne, wie hoch das Wasser steht.

5 Von einem Zylinder sind der Radius r und eine der Größen A_M, A_O und V gegeben. Berechne die Höhe h und die zwei fehlenden Größen.
a) $r = 6\,cm$; $A_M = 450\,cm^2$ b) $r = 7{,}6\,cm$; $V = 2{,}0\,l$ c) $r = 2{,}5\,cm$; $A_O = 375\,cm^2$



6 Ein Standzylinder mit einem Innendurchmesser von d = 32 mm soll als Messglas geeicht werden. Ermittle, in welchen Abständen die Teilstriche für je 5 cm^3 anzubringen sind.

7 Wie viel Blech benötigt man zur Herstellung einer Konservendose mit dem Durchmesser d und dem Volumen V? Rechne für Falze und Verschnitt 15 % dazu.
a) $d = 10\,cm$; $V = 1\,l$ b) $d = 8{,}0\,cm$; $V = \frac{1}{2}\,l$ c) $d = 25\,cm$; $V = 2\,l$

Litfaßsäulen sind nach ihrem Erfinder, dem Drucker Ernst Litfaß (1816 – 1874) benannt, der diese Säulen erstmals als Anschlagsäulen 1855 in Berlin aufstellte.

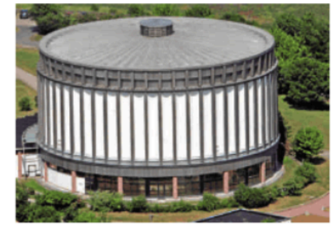
8 Die Trans-Alaska-Pipeline hat einen Innendurchmesser von 1,2 m und ist 1280 km lang. Berechne, wie viel m^3 Öl sich in der vollständig gefüllten Pipeline befinden.

9 Ein rechteckiges Blatt Papier mit den Seiten a und b kann auf zwei Arten zu einem Zylindermantel gebogen werden. Bestimme die Volumina V_1 und V_2 der beiden möglichen Zylinder.

10 Eine zylindrische Litfaßsäule ist 2,60 m hoch. Sie hat außen einen Durchmesser von 1,20 m. Die Wandstärke beträgt 5 cm.
a) Berechne, wie groß die Fläche ist, die beklebt werden kann.
b) Ermittle, wie viel Prozent des Gesamtvolumens der Litfaßsäule der innere Hohlraum beträgt.
c) Berechne die Masse der Litfaßsäule ohne Abdeckung, wenn sie aus Beton besteht.
Hinweis: Dichte von Beton $\varrho = 2{,}1\,\frac{g}{cm^3}$

11 Bei der Herstellung von integrierten Schaltkreisen werden extrem dünne Drähte aus Gold verwendet. Ein solcher Draht hat einen Durchmesser von 0,01 mm.
a) Berechne die Masse von 1000 km Draht (Dichte von Gold: $\varrho = 19{,}3\,\frac{g}{cm^3}$).
b) Berechne, wie viel Meter Draht man aus 1 cm^3 Gold herstellen kann.

12 Das Gebäude des Bauernkriegs-Panoramas auf dem Schlachtberg bei Bad Frankenhausen hat die Form eines Kreiszylinders. Im Innenraum (Durchmesser 39,15 m) schuf der Maler Werner Tübke eines der größten Ölgemälde der Welt. Die Vorbereitung und Ausführung des 14 m hohen Rundbildes, auf dem über 3000 Figuren dargestellt sind, dauerte über 10 Jahre. Berechne den Flächeninhalt des Rundbildes.



Bist du sicher?

1 Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt eines Zylinders mit dem Durchmesser 17 cm und der Höhe 9 cm. Berechne auch den Flächeninhalt seiner Mantelfläche.

2 In einen oben offenen, zylindrischen Blechbehälter mit der Höhe 5 dm und dem Durchmesser 30 cm werden 20 Liter Wasser eingefüllt.
a) Berechne, wie hoch das Wasser im Behälter steht.
b) Berechne, wie viel Blech man für die Herstellung von 100 derartigen Behältern benötigt, wenn man 20 % Verschnitt dazurechnen muss.

13 Übertrage die Tabelle in dein Heft und berechne die fehlenden Größen für einen geraden Zylinder. Rechne zunächst mit Variablen und setze erst am Ende die gegebenen Zahlen ein.

r	h	A_G	V	A_M	A_O
5,2 cm			98 cm^3		
	0,45 dm		2,1 dm^3		
		28 m^2	45 m^3		
			64 cm^3	72 cm^2	
	3,5 cm	72 cm^2			
				1,2 dm^2	1,90 dm^2

14 Auf dem Hausberg zu Jena steht der Fuchsturm, dessen Höhe gleich seinem Umfang ist. Wie verhalten sich Höhe und Durchmesser des Turmes zueinander? Berechne die Höhe und das Volumen des Turmes, wenn sein Durchmesser 9 m beträgt.

15 Die Körper in Fig. 1 haben beide die Länge 2a und das Bohrloch jeweils den Durchmesser $\frac{1}{2}$a.
a) Ermittle V und A_O der Körper für a = 4 cm.
b) Ermittle Terme zur Berechnung von V und A_O der Körper in Abhängigkeit von a. Vereinfache diese so weit wie möglich.
c) Für welchen Wert a beträgt das Volumen jeweils 100 cm^3? Ermittle.

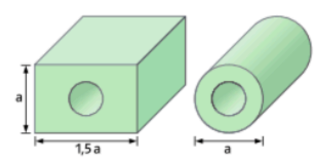


Fig. 1

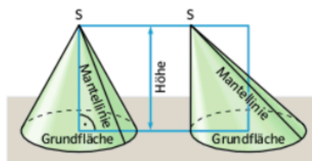
16 Untersucht, wie sich Umfang, Oberfläche, Mantelfläche und Volumen eines Zylinders verändern, wenn man nur den Radius, nur die Höhe oder beides verdoppelt.

5 Kreiskegel

Christian: „Möchtest du noch etwas Orangensaft?“
Sandra: „Gerne, danke. Aber nur halb voll bitte!“

Verbindet man die Punkte eines Kreises mit einem nicht in der Kreisflächenebene liegenden Punkt S, so erhält man einen **Kreiskegel** mit der Spitze S (Fig. 1).
Den Abstand zwischen Spitze und Grundfläche nennt man Höhe des Kegels.
Eine **Mantellinie** s ist die Verbindungsstrecke eines Kreispunktes mit der Kegelspitze. Sind alle Mantellinien gleich lang, spricht man von einem **geraden Kreiskegel**.
Schneidet man diesen Kegel entlang des Randes der Grundfläche und einer Mantellinie auf und breitet seine Oberfläche in die Ebene aus, so erhält man das Netz des geraden Kreiskegels (Fig. 2).
Man kann definieren:
Ein gerader Kegel ist ein Körper, der begrenzt wird von einer Kreisfläche als Grundfläche und einer gekrümmten Mantelfläche, die abgewickelt einen Kreisausschnitt ergibt.

Wenn nicht anders gefordert, werden im Weiteren stets gerade Kreiskegel betrachtet.



gerader Kegel „schiefer“ Kegel
Fig. 1

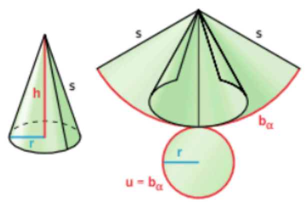


Fig. 2

Fig. 3 und Fig. 4 zeigen jeweils Schrägbild und Zweitafelbild ein und desselben Kegels in verschiedenen Lagen. Während in Fig. 3 ein „liegender“ Kegel (Grundfläche parallel zur Bildebene) dargestellt ist, „steht“ der Kegel in den Darstellungen von Fig. 4. Die Regeln beim Zeichnen von Schrägbildern gelten natürlich für Kegel genauso wie z.B. für Zylinder, so dass die Aussagen in Lerneinheit 4 übertragen werden können.

Das Schrägbild eines „liegenden“ Kreiskegels ist exakt konstruierbar. Hat man Grundkreis und Spitze gezeichnet, konstruiert man von S aus die Tangenten an den Kreis.

Schrägbilder von „stehenden“ Kreiskegeln werden dagegen meist nur skizziert. Warum?

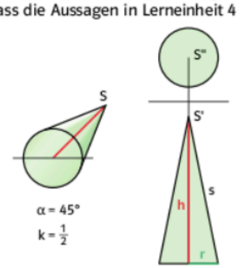


Fig. 3

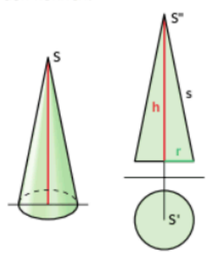


Fig. 4

Aus Klasse 7 wissen wir: Pyramiden mit gleicher Höhe und gleichen Grundflächeninhalten besitzen das gleiche Volumen. Betrachtet wird nun eine quadratische Pyramide und ein Kreiskegel mit gleich großen Grundflächeninhalten und gleicher Höhe. Jede Ebene, die parallel zur Grundfläche verläuft und beide Körper in gleichem Abstand von der Grundfläche schneidet, erzeugt gemäß den Eigenschaften zentrischer Streckungen inhaltsgleiche Schnittfiguren (Fig.1).
Daher gilt nach dem Satz des Cavalieri für das Volumen des Kegels

$V = V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$

Satz des Cavalieri: Wenn für zwei Körper gilt:
(1) ihre Grundflächen sind inhaltsgleich,
(2) ihre Höhen sind gleich,
(3) jede Ebene, die parallel zur Grundfläche verläuft und beide Körper in gleichem Abstand von der Grundfläche schneidet, erzeugt inhaltsgleiche Schnittfiguren,
so besitzen beide Körper das gleiche Volumen.

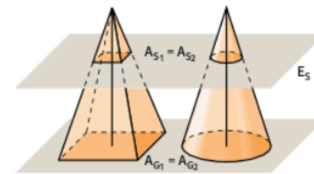


Fig. 1

Das Netz des Kegelmantels ist ein Kreisausschnitt. Sein Radius ist die Länge s der Mantellinien, sein Bogen ist gleich dem Umfang des Grundkreises:

$b = 2 \cdot \pi \cdot r.$

Für den Flächeninhalt dieses Kreisausschnittes gilt daher:

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot s = \pi \cdot r \cdot s.$

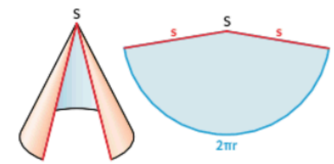


Fig. 2

Für einen **Kegel** mit dem Grundkreisradius r, der Grundfläche A_G, der Mantellinie s und der Höhe h gilt:

Volumen V	$\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$
Flächeninhalt der Mantelfläche A_M	$\mathbf{A_M = \pi \cdot r \cdot s}$
Oberflächeninhalt A_O	$\mathbf{A_O = A_G + A_M = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot r (r + s)}$

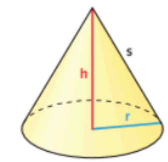


Fig. 3

Beispiel
Ermittle die Masse und den Oberflächeninhalt eines Kreiskegels aus Kiefernholz mit dem Radius r = 3 cm und der Höhe h = 4 cm.
Lösung:
Die Dichte von Kiefernholz kann man einer Formelsammlung entnehmen. Sie beträgt $0{,}5\,\frac{g}{cm^3}$. Die Mantellinienlänge s = 5 cm ermittelt man konstruktiv aus dem Aufriss des Zweitafelbildes des stehenden Kreiskegels (Fig. 4).

$m = \varrho \cdot V = \varrho \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 0{,}5\,\frac{g}{cm^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3\,cm)^2 \cdot 4\,cm \approx 18{,}8\,g$

$A_O = \pi \cdot r \cdot (r + s) = \pi \cdot 3\,cm \cdot (3\,cm + 5\,cm) \approx 75{,}4\,cm^2$

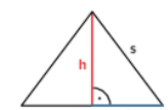


Fig. 4

Aufgaben

1 Berechne für einen Kreiskegel mit Radius r und Höhe h das Volumen V, den Inhalt des Mantels A_M und den Oberflächeninhalt A_O.
a) r = 1,6 m; h = 45 cm b) r = 3 cm; h = 6 cm
c) r = 9 cm; h = 4 cm d) r = 12 cm; h = 14 cm
e) r = 16 cm; h = 10,5 cm f) r = 8 mm; h = 7,5 cm

Hinweis: Ermittle die Länge der Mantellinie mit einer maßstäblichen Konstruktion.

2 Ordne die folgenden Körper in aufsteigender Reihenfolge nach ihrem Rauminhalt.

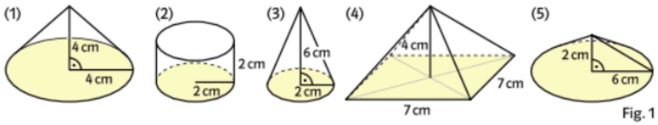


Fig. 1

3 Bei einem Kreiskegel mit dem Radius r, der Höhe h, der Mantellinienlänge s, dem Volumen V, dem Mantelflächeninhalt A_M und dem Oberflächeninhalt A_O sind drei der sechs Größen gegeben. Berechne die fehlenden drei Größen.

a) $s = 41\,cm$; $h = 40\,cm$; $r = 9\,cm$
b) $r = 8\,cm$; $V = 192\pi\,cm^3$; $s = 12\,cm$
c) $h = 12\,cm$; $s = 13\,cm$; $A_M = 65\pi\,cm^2$
d) $s = 7{,}5\,cm$; $A_M = 117{,}8\,cm^2$; $V = 146{,}4\,cm^3$
e) $h = 20\,cm$; $V = 2{,}5\,l$; $s = 22{,}8\,cm$
f) $A_M = 128\,cm^2$; $A_O = 223\,cm^2$; $V = 157{,}2\,cm^3$

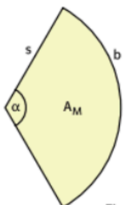


Fig. 2

4 Ein Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel 90° (120°, 180°, 270°) und dem Radius 8 cm wird zu einem Kegel zusammengebogen (Fig. 2). Berechne den Mantelflächeninhalt und den Radius des entstehenden Kegels.

Bist du sicher?

1 Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt der beiden Körper. Ermittle weitere für die Berechnung notwendige Größen durch eine maßstäbliche Konstruktion.

a)

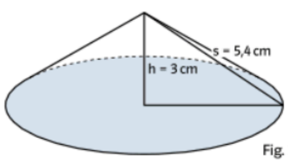


Fig. 3

b)

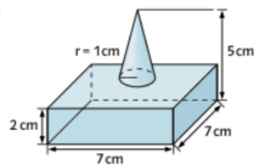


Fig. 4

5 Wie verändert sich bei einem Kegel
a) das Volumen, wenn der Radius verdoppelt wird?
b) das Volumen, wenn die Höhe vervierfacht wird?
c) das Volumen, wenn der Radius verdoppelt und gleichzeitig die Höhe halbiert wird?
d) die Mantelfläche, wenn der Radius verdreifacht wird?
e) die Mantelfläche, wenn die Mantellinienlänge verdoppelt wird?
f) die Mantelfläche, wenn sowohl Radius als auch Mantellinienlänge verdreifacht werden?

6 Ein kegelförmiger Kieshaufen soll abgefahren werden. Sein Umfang wurde durch Abschreiten näherungsweise mit 22 m ermittelt, die Höhe auf 2 m geschätzt.
a) Zeichne ein maßstäbliches Zweitafelbild des Kieshaufens.
b) Berechne, wie viele Fahrten mit einem Baufahrzeug von 3 t Ladefähigkeit dazu erforderlich sind, wenn $1\,m^3$ Kies 1800 kg wiegt.

7 Ein kegelförmiges Senklot aus Stahl (Dichte von Stahl: $7{,}8\,\frac{g}{cm^3}$) wiegt 245 g und besitzt eine Höhe von 7,5 cm. Berechne den Durchmesser des Senklotes am oberen Ende.

Informiere dich, wozu ein Senklot benötigt wird.

8 Ein Turmdach hat die Form eines Kegels mit dem Grundkreisdurchmesser d = 4,8 m, der Höhe h = 6 m und der Mantellinienlänge s = 6,46 m.
a) Berechne den umbauten Raum des Turmdachs (Wandstärken werden vernachlässigt).
b) Berechne, wie teuer die Eindeckung des Turmdachs mit Dachschindeln einschließlich 19 % Mehrwertsteuer ist, wenn für $1\,m^2$ Dacheindeckung ohne Mehrwertsteuer 285 € berechnet werden.


Auch das Lübecker Holstentor hat Turmdächer in Form von Kegeln.

9 Berechne das Volumen der folgenden Blumenbehälter für d = 20 cm und allgemein.

a)

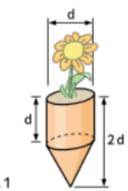


Fig. 1

b)

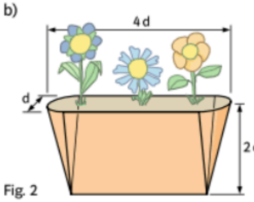


Fig. 2

c)

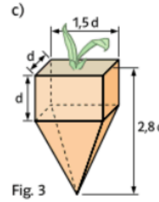


Fig. 3

10 Ein kelchförmiges Glas hat die Gestalt eines Kegels mit dem Durchmesser 6,6 cm und der Höhe 9,7 cm (Fig. 4). Dorothee hat es randvoll mit Tomatensaft gefüllt und trinkt jetzt vom Saft. Das Glas kann dabei auf verschiedene Weisen noch „halb voll" sein. Untersucht dazu in Gruppen folgende Fragen:
a) Wie viel Prozent des Rauminhalts des Glases sind noch gefüllt, wenn das Glas noch bis zur halben Höhe mit Saft gefüllt ist?
b) Wie hoch steht der Saft im Glas, wenn der halbe Rauminhalt des Glases gefüllt ist?
c) Wie hoch steht der Saft im Glas, wenn der Durchmesser des Flüssigkeitsspiegels auf die Hälfte abgenommen hat?
d) Wie viel Prozent des Rauminhalts des Glases sind noch gefüllt, wenn der Flächeninhalt des Flüssigkeitsspiegels auf die Hälfte abgenommen hat?


Fig. 4

11 Wird ein gerader Kreiskegel durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so entstehen ein (kleiner) Kreiskegel und ein **Kegelstumpf** (Fig. 5). Das Volumen eines Kegelstumpfes erhält man, indem man vom Volumen des Ausgangskegels das Volumen des „kleinen" Kegels subtrahiert.
In Nachschlagewerken findet man für einen Kegelstumpf folgende Volumenformel:
$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot(r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2)$. Leite diese Formel her. Nutze eventuell ein CAS.
Hinweis: Man kann die unbekannte Größe h_2 (Fig. 5) mit Hilfe des Strahlensatzes durch r_1, r_2 und h ersetzen.

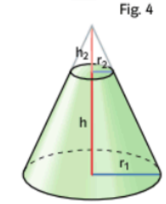


Fig. 5

12 Dreht man ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck (a = b = 4 cm) entweder um einen Schenkel oder um die Basis, so entsteht jeweils ein Körper.
a) Ermittle jeweils das Volumen des entstandenen Körpers. Vergleiche.
b) Berechne jeweils die Masse des entstandenen Körpers, wenn der Körper aus Stahl ($\varrho = 7{,}8\,\frac{g}{cm^3}$) besteht.

6 Kugel

Deutschland nimmt eine Fläche von etwa 360 000 km^2 ein. Der Umfang der Erde beträgt circa 40 000 km. Wie häufig passt die Fläche Deutschlands wohl in die Erdoberfläche?

(1)
(2)
(3)

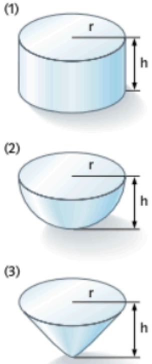


Fig. 2

Bei der Drehung (Rotation) eines Kreises um einen seiner Durchmesser (Fig. 1) entsteht eine **Kugel**. Sie kann also als Menge aller Punkte im Raum definiert werden, welche von einem festen Punkt (Mittelpunkt) den gleichen Abstand (Radius) besitzen.

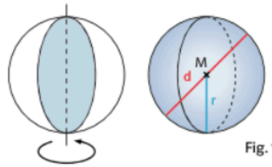


Fig. 1

Vergleicht man das Volumen einer Halbkugel mit dem Volumen eines Zylinders und dem Volumen eines Kegels, die alle den gleichen Radius r und die Höhe $h = r$ haben (Fig. 2), so ergibt sich:
Das Volumen des Kegels ist kleiner, das des Zylinders ist größer als das der Halbkugel, also $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r < V_{Halbkugel} < \pi \cdot r^2 \cdot r$.
Bildet man den Mittelwert beider Grenzen, so erhält man den Nährungswert $V_{Halbkugel} \approx \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

Für das in Fig. 3 dargestellte Experiment wird ein Zylinder, dessen Körperhöhe doppelt so groß wie sein Grundkreisradius ist, mit Wasser gefüllt.
Eine Kugel mit gleichem Durchmesser verdrängt beim vollständigen Eintauchen in den Zylinder genau die Wassermenge, die ihrem Volumen entspricht.
Es zeigt sich, dass das Kugelvolumen etwa zwei Drittel des Zylindervolumens beträgt.

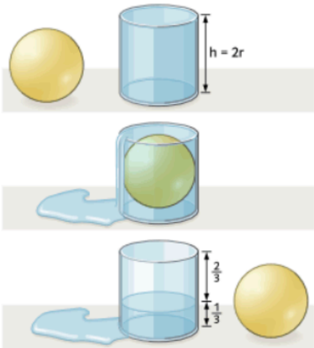


Fig. 3

Man kann beweisen, dass dieses Ergebnis sogar exakt gilt. $V_{Kugel} = \frac{2}{3} \cdot V_{Zylinder}$

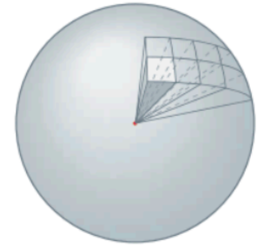
$V = \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 h$

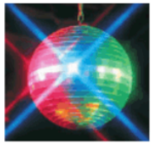
Da $h = 2r$, gilt: $V = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot 2r$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Auf einem Beweis für die Formel zur Berechnung des Volumens einer Kugel wird an dieser Stelle verzichtet.

Um eine Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel zu finden, kann man sich die Kugel in sehr viele kleine Körper zerlegt denken. Alle diese Körper haben näherungsweise die Form von Pyramiden, deren Spitzen sich im Kugelmittelpunkt befinden. Mit zunehmender Anzahl der spitzen Körper lässt sich die Wölbung ihrer Grundflächen vernachlässigen, da die Grundflächen immer kleiner werden. Somit kann man die Volumenformel für Pyramiden mit ebener Grundfläche anwenden.





1. Volumenformel einer kleinen Pyramide P_i: $V_{P_i} = \frac{1}{3} A_{G_i} \cdot r$
2. Also gilt für das Volumen der Kugel: $V_K = \frac{1}{3}(A_{G_1} + A_{G_2} + A_{G_3} + \ldots + A_{G_n}) \cdot r$
3. Die Summe aller Grundflächeninhalte A_{G_i} bildet den Oberflächeninhalt A_O: $A_O = A_{G_1} + A_{G_2} + A_{G_3} + \ldots + A_{G_n}$
4. Einsetzen: $V_K = \frac{1}{3} \cdot A_O \cdot r$; umgeformt: $A_O = 3 \cdot \frac{V_K}{r}$
5. Einsetzen der Volumenformel für die Kugel und Kürzen ergeben: $A_O = 4r^2 \cdot \pi$

Für das Volumen V und für den Oberflächeninhalt A_O einer Kugel mit Radius r gilt:
$$\mathbf{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3; \quad A_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

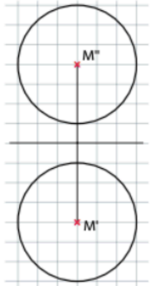


Fig. 1

Beispiel
Berechne für die in Fig. 1 im Zweitafelbild gegebene Kugel das Volumen und den Oberflächeninhalt.
Lösung:
$r = 1{,}2\,cm$; $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1{,}2\,cm)^3 \approx 7{,}2\,cm^3$; $A_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (1{,}2\,cm)^2 \approx 18{,}1\,cm^2$

Aufgaben

1 Bei einer Kugel ist eine der Größen r, V und A_O gegeben. Berechne die übrigen.
a) $r = 7{,}5\,cm$ b) $A_O = 2826\,cm^2$ c) $r = 1{,}12\,m$ d) $V = 113\,m^3$

2 Ein kugelförmiger Gaskessel mit dem Außendurchmesser $d = 36\,m$ erhält einen neuen Anstrich. Berechne, wie viele Quadratmeter zu streichen sind.

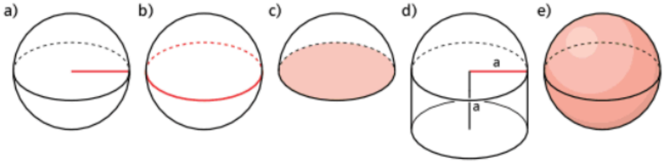
3 Bestimme den Durchmesser und den Oberflächeninhalt eines kugelförmigen Freiluftballons, der ein Volumen von $1500\,cm^3$ hat.

Bist du sicher?

1 Bei einer Kugel ist von den drei Größen r, V und A_O eine gegeben. Berechne die übrigen.
a) $r = 8{,}5\,dm$ b) $A_O = 2826\,dm^2$ c) $V = 226\,cm^3$ d) $V = 1\,l$

Ein Vierzeiler zum Einprägen:
„Bedächtig kommt einhergeschritten
vier Drittel pi mal r zur dritten,
und was sie auf dem Leibe hat
ist vier mal pi mal r-Quadrat."

4 Berechne das Volumen der dargestellten Körper.



a) Radius 6,5 cm — b) Umfang 12,3 m — c) Kreisfläche 270 cm^2 — d) Radius 7,2 cm — e) Oberfläche 500 cm^2

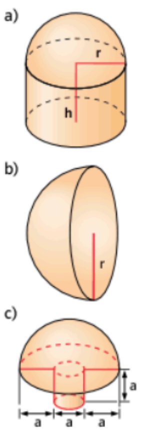


Fig. 2

5 Ermittle Terme zur Berechnung des Volumens und des Oberflächeninhalts der auf der Randspalte in Fig. 2 dargestellten Körper. Vereinfache die Terme gegebenenfalls.

6 a) Wie verändert sich das Volumen und der Oberflächeninhalt einer Kugel, wenn ihr Radius verdoppelt (verdreifacht, halbiert) wird?
b) Ein kugelförmiger Luftballon wird bis zum doppelten Umfang (doppelten Oberflächeninhalt, doppelten Volumen) aufgeblasen. Wie ändert sich dabei der Radius?

7 Eine Moschee besitzt eine vergoldete Kuppel, die als eine Halbkugel mit dem Durchmesser d = 23 m angesehen werden kann.
a) Berechne, wie viel Quadratmeter Oberfläche vergoldet sind.
b) Nimm an, die Kuppel ist mit einer Blattgoldschicht von 0,0001 mm Dicke vergoldet. Berechne, wie viel die Goldschicht wiegt.

8 Wie viel Kilogramm wiegt eine Kugel mit dem Durchmesser d = 10 cm
a) aus Granit, wenn 1 cm^3 Granit 2,9 g wiegt,
b) aus Gold, wenn 1 cm^3 Gold 19,3 g wiegt,
c) aus Holz, wenn 1 cm^3 Holz 0,5 g wiegt,
d) aus Styropor, wenn 1 cm^3 Styropor 0,040 g wiegt?

9 Berechne den Durchmesser einer
a) Sandsteinkugel von 10 kg, wenn 1 cm^3 Sandstein 2,6 g wiegt.
b) Bleikugel von 10 g, wenn 1 cm^3 Blei 11,3 g wiegt.

10 1000 gleich große Bleikugeln mit dem Durchmesser d werden zu einer einzigen Kugel zusammengeschmolzen.
a) Welchen Durchmesser hat diese neue Kugel?
b) Vergleiche ihre Oberfläche mit der Gesamtoberfläche der 1000 kleinen Kugeln.

11 Der Äquatorumfang der Erde beträgt etwa 40 000 km. Berechne Näherungswerte für
a) den Erdradius, b) die Größe der Erdoberfläche, c) das Volumen der Erde.

12 Ein Wasserhahn tropft. Die nahezu kugelförmigen Tropfen haben einen Durchmesser von 5 mm. Alle 2 Sekunden fällt ein Wassertropfen. Wie viel Liter Wasser gehen dadurch im Laufe einer Woche verloren? Berechne.

13 Ein kugelförmiger Öltropfen hat einen Durchmesser von 0,5 cm. Er verteilt sich als kreisförmiger Ölfleck von 1 m Durchmesser auf einer Wasseroberfläche.
Berechne die Dicke des Ölflecks.

Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen

1 Übernimm die Tabelle und berechne die fehlenden Größen für einen Kreis und den dazugehörigen Kreisausschnitt/Kreisbogen mit dem Zentriwinkel $\alpha = 65°$.

	a)	b)	c)	d)	e)
r	4,2 cm				
u		15 m			
A			0,8 ha		
b_α				37 dm	
A_α					4,2 m^2

2 a) Berechne jeweils den Umfang und den Flächeninhalt der gefärbten Flächen für a = 4 cm. Die rot markierten Punkte sind die Mittelpunkte der Kreisbögen.
b) Ermittle jeweils einen Term zur Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts der gefärbten Flächen in Abhängigkeit von a. Vereinfache den Term so weit wie möglich.
c) Berechne, für welchen Wert a der Flächeninhalt der gefärbten Fläche jeweils 20 cm^2 beträgt.

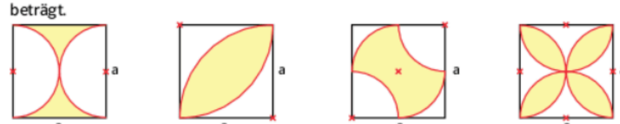


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

3 Die 3,2 m breite Straße des Kreisverkehrs in Fig. 5 wurde neu geteert. Die Fläche der Straße im Kreisverkehr beträgt 220 m^2. In der Mitte des Kreisverkehrs soll neuer Rasen gesät werden. Berechne, für wie viele Quadratmeter Samen gekauft werden muss.

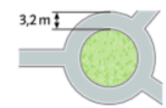
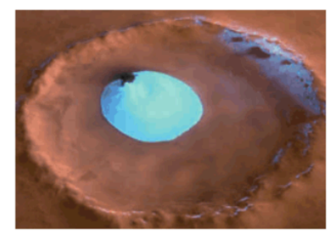


Fig. 5

4 Das nebenstehende Foto zeigt einen kreisförmigen Krater in der Tiefebene Vastitas Borealis in der Nähe des Mars-Nordpols.
a) Der Krater hat einen Flächeninhalt von ca. 1000 m^2. Berechne den Durchmesser und den Umfang des Kraters.
Ermittle näherungsweise den Maßstab, mit dem der Krater abgebildet wurde.
b) Schätze, welchen Flächeninhalt die im Krater eingeschlossene Fläche aus Eis besitzt.



5 Um den Wassereimer aus dem alten Brunnen heraufzuholen (Fig. 6), muss man die Winde 13-mal drehen. Dabei wickelt sich das Seil um die Trommel. Diese hat einen Durchmesser von 20 cm. Berechne näherungsweise die Tiefe des Brunnens. Vernachlässige dabei die Dicke des Seils.

Fig. 6

6 Vergleiche die Flächeninhalte der vier Kreisteile in Fig. 7. Begründe rechnerisch.

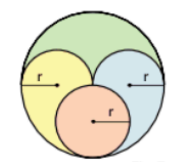


Fig. 7

7 Die Innenfläche eines Stadions besteht aus einem Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen vom Radius r = 36,9 m. Die innere der herumführenden Laufbahnen hat innen eine Länge von 400 m.
a) Berechne die Länge der geraden Stücke der Laufbahn.

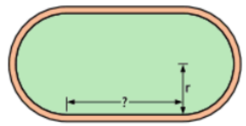


Fig. 1

b) Berechne, welche Kurvenvorgabe ein Läufer auf der zweiten Bahn von innen bekommen muss, wenn die Laufbahnen jeweils 1,22 m breit sind.

Hinweis zu Aufgabe 8a):
Eine für die Rechnung benötigte Größe muss durch eine maßstäbliche Zeichnung ermittelt werden.

8 a) Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des Körpers in Fig. 2 für a = 4 cm. Berechne außerdem die Masse des Körpers, wenn er aus Stahl ist.
b) Ermittle den Wert a, für den sich das Volumen $V = 62{,}5\pi\,cm^3$ ergibt.

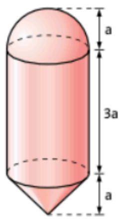


Fig. 2

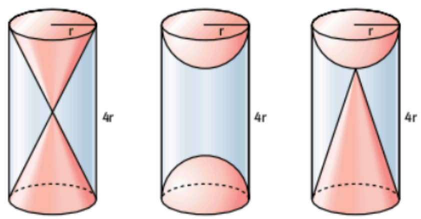
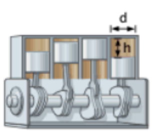


Fig. 3

9 In Fig. 3 sind einem Zylinder jeweils Körper einbeschrieben. Ermittle das Volumen dieser Körper in Abhängigkeit von r sowie ihren prozentualen Anteil am Gesamtvolumen des Ausgangszylinders.



10 Bei Verbrennungsmotoren bewegen sich Kolben in zylinderförmigen Verbrennungskammern auf und ab und geben ihre Bewegung an die Kurbelwelle weiter. Das Gesamtvolumen (der Hubraum) entscheidet z. B. auch über die Höhe der Kfz-Steuer.
Berechne den Hubraum eines vierzylindrigen Pkw-Motors, wenn sein Kolbendurchmesser d = 80 mm und der Kolbenhub h = 88 mm betragen.

11 a) Beschreibt die Form der Körper, die bei der Rotation in Fig. 4 – 8 entstehen. Skizziert für die entstandenen Körper die Schrägbilder und die Zweitafelbilder.
b) Ermittelt das Volumen und bei den Fig. 4 bis 8 auch den Oberflächeninhalt der Rotationskörper für a = 2 cm.

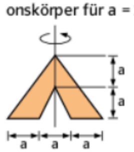


Fig. 4

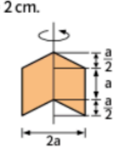


Fig. 5

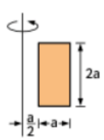


Fig. 6

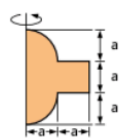


Fig. 7

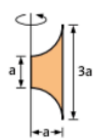


Fig. 8

c) Wie würde sich das Volumen der Körper verändern, wenn man den Wert für a verdoppelt (verdreifacht, halbiert)?
d) Ermittelt eine Formel zur Berechnung des Wertes a in Abhängigkeit des Volumens V.

12 Das Pantheon in Rom (Fig. 1) ist das am besten erhaltene Bauwerk aus der römischen Antike. Fig. 2 zeigt den Aufriss des Rundbaus mit dem Kuppelgewölbe. Die beeindruckende Wirkung des Innenraumes beruht auf der gleichen Größe von Durchmesser und Höhe.
Berechne das Volumen des umbauten Raumes des Pantheon.


Fig. 1

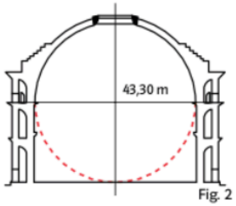


Fig. 2

13 Fig. 3 zeigt den Querschnitt einer Hohlkugel.
a) Zeige: Für eine Hohlkugel gilt die Volumenformel $V = \frac{4}{3}\cdot(r_a^3 - r_i^3)\cdot\pi$.
b) Drücke das Volumen V_H einer Hohlkugel durch den Außenradius r_a und die Dicke d der Hohlkugel aus. Vereinfache die Formel so weit wie möglich.

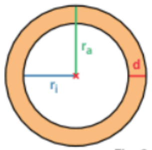


Fig. 3

14 Ein Trinkhalm mit dem Durchmesser 4 mm wird in Seifenlauge getaucht und wieder herausgezogen. Dabei bildet sich im Trinkhalm ein 7 mm langer Pfropfen. Nun wird daraus eine kugelförmige Seifenblase mit etwa 8 cm Durchmesser geblasen.
Berechne die ungefähre Dicke der Seifenblasenhaut.

15 Ein Turniergolfball besteht aus drei Schichten (Fig. 4), dem Kern, der Ummantelung und der Schale. Ein Ball hat 42,8 mm Durchmesser und eine Masse von 46,23 g. Die Ummantelung hat eine Schichtdicke von 3,0 mm, der Kern hat einen Durchmesser von 34,8 mm, die Schale hat eine Dicke von 1,0 mm.
a) Bestimme den prozentualen Anteil des Volumens der Schale, der Ummantelung und des Kerns am Gesamtvolumen des Balles.
b) Die Schale ist aus Lithium, $1\,cm^3$ Lithium wiegt 0,534 g, die Ummantelung aus Graphit, $1\,cm^3$ Graphit wiegt 2,39 g. Berechne die Dichte des Materials, aus dem der Kern besteht.

Fig. 4

16 Ein Behälter, der zur Aufbewahrung von Flüssigkeit genutzt wird, hat die Form eines geraden Kreiszylinders, der oben offen ist und unten durch eine nach innen gewölbte Halbkugel begrenzt wird. Die Wandstärke des Behälters bleibt unberücksichtigt (Fig. 5).
a) Bei einem solchen Behälter beträgt der Radius r der Halbkugel 30 cm und die Höhe h des Kreiszylinders 120 cm. Berechne, wie viele Liter der Behälter maximal fasst. Ermittle die Füllhöhe im Behälter, wenn sich darin 200 Liter der Flüssigkeit befinden.
b) Der Oberflächeninhalt des Behälters setzt sich aus dem Flächeninhalt des Zylindermantels und dem Oberflächeninhalt der Halbkugel zusammen. Stelle eine Formel zur Berechnung des Oberflächeninhalts des Behälters in Abhängigkeit von r und h auf.
c) Das Volumen eines solchen Behälters lässt sich mit der Formel $V = \frac{A_0}{2}\cdot r - \frac{5}{3}\pi\cdot r^3$ berechnen.
Wähle $A_0 = 75\,dm^2$ und ermittle für diesen festen Oberflächeninhalt den Radius r so, dass das Fassungsvermögen des Behälters maximal wird.
Hinweis: Zeichne den Graphen der Funktion r → V(r) und ermittle die Maximumstelle (Fig. 6).

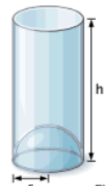


Fig. 5

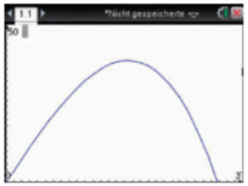


Fig. 6

Für Könner!
Beweise die Formel in Aufgabe 16c).
Hinweis: Löse die Formel für den Oberflächeninhalt nach der Höhe auf und setze den Term in die Volumenformel ein. Vereinfache dann.

Exkursion Die Geschichte der Zahl π

Am 14. März ist in jedem Jahr der π-Tag nach der amerikanischen Datumschreibweise 3.14.

Eine historische Quelle zur Geschichte der Kreiszahl π ist auch die Bibel. Im Alten Testament werden im Bericht über Salomons Tempelbau (um 950 v.Chr.) verschiedene Tempelgeräte beschrieben, darunter auch ein riesiges Gefäß, das für Waschungen der Priester gedacht war.

In der Einheitsübersetzung von 1978 heißt es (1. Könige 7, 23):

Fig. 1

Der Rekord im π-Vorlesen (Stand: 2013) liegt bei 108 000 Nachkommastellen in 30 Stunden.
Über 360 freiwillige Leser lasen im Juni 2005 jeweils 300 Stellen.

Dann machte er das „Meer". Es wurde aus Bronze gegossen und maß zehn Ellen von einem Rand zum anderen; es war völlig rund und fünf Ellen hoch. Eine Schnur von dreißig Ellen konnte es rings umspannen.

Mit „völlig rund" ist wohl kreisförmig gemeint, also ist nach der Bibel $\pi = \frac{u}{d} = \frac{30}{10} = 3$.
Die Näherung $\pi \approx 3$ entspricht dem altbabylonischen Wert für π. Es gibt aber ältere und wesentlich bessere Näherungen.

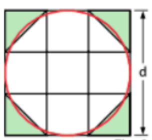


Fig. 2

Die Ägypter kannten schon etwa 2000 Jahre vor Christus eine sehr genaue Berechnung des Flächeninhalts des Kreises. Im Papyrus Rhind (um 1700 v.Chr.) findet man eine Darstellung dazu.
Um den Kreis wurde ein Quadrat gezeichnet, dessen Seitenlänge gleich dem Kreisdurchmesser d ist. Dann zerlegte man das Quadrat in neun gleich große Teilquadrate. Als Näherung für den Flächeninhalt des Kreises wurde der Flächeninhalt des Achtecks in Fig. 2 genommen, also sieben der neun Teilquadrate des Durchmesser-Quadrats.
Das ergibt $A \approx \frac{7}{9}d^2$.

Da man aber den Flächeninhalt als Quadrat einer Länge haben wollte (was der Quadratur entspricht), wurde weitergerechnet $A \approx \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 \approx \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}\right)d^2$.
Setzt man nun $d = 2r$, so ergibt sich $A \approx \left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2$.
Mit $\pi \approx \frac{16^2}{9^2} = \frac{256}{81} = 3{,}160\,49\ldots \approx 3{,}16$ wurde vor 4000 Jahren eine gute Näherung für π gefunden, die sich um weniger als 1 % vom richtigen Wert unterscheidet.

Im Laufe der Zeit wurden immer bessere Näherungen für π bestimmt. Der heute übliche Wert stammt von Archimedes (287–212 v.Chr.). Er hat den Umfang des Kreises durch Annäherung durch ein 96-Eck bestimmt und dabei $3 + \frac{10}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ gefunden, wobei für die Praxis $\pi \approx \frac{22}{7}$ benutzt wurde, was heute in dezimaler Schreibweise $\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3{,}14$ entspricht.

Aus der Schachtelung des Archimedes bestimmte Ptolemäus (ca. 100 – ca. 160 n.Chr.) durch „angenäherte Mittelbildung" $\pi \approx 3 + \frac{17}{120}$. Er rechnete dabei wie in der babylonischen Mathematik mit 60er-Brüchen:
$\frac{22}{7} \approx 3 + \frac{8}{60} + \frac{27}{3600}$; $3 + \frac{10}{71} = 3 + \frac{8}{60} + \frac{34}{3600}$, woraus er dann als Mittelwert $3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3 + \frac{17}{120}$ bildete.

In der chinesischen Mathematik wurde anfangs mit $\pi = 3$ gerechnet. Liu Hui (um 250 n.Chr.) bestimmte mithilfe eines 192-Ecks eine Schachtelung für π, später berechnete er an einem 3072-Eck $\pi \approx \frac{3927}{1250} = 3{,}1416$.
Im 5. Jahrhundert n.Chr. findet sich bei Tsu Chung-Chih $\pi \approx \frac{355}{113}$. Dies ist, wie man mithilfe von Kettenbrüchen zeigen kann, die bestmögliche Näherung für π durch einen gewöhnlichen Bruch, dessen Nenner kleiner als 1000 ist. Eine Vorstellung über die Genauigkeit dieser Näherung erhält man, wenn man sie als Dezimalbruch schreibt. Es ergibt sich
$\pi \approx \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$
Dieser Wert ist auf sechs Dezimalen genau.

*Es ist unbekannt, ob π eine **normale Zahl** ist, das heißt, ob sie jede mögliche Ziffernfolge als Teilblock enthält.*

Ludolph van Ceulen (1540–1610) berechnete schließlich nach der Idee von Archimedes am 2^{62}-Eck (2^{62} ist im Zehnersystem geschrieben eine Zahl mit 19 Ziffern!) die Zahl π auf 35 Dezimalen genau. Er war auf diese Leistung so stolz, dass er in seinem Testament festlegte, dass diese Zahl auf seinem Grabstein eingemeißelt werden soll. Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts nannte man ihm zu Ehren π die Ludolph'sche Zahl.

Wissenschaftler senden mit Radioteleskopen die Kreiszahl π ins Weltall. Sie meinen, dass andere Zivilisationen diese Zahl kennen müssen.

Neben Näherungswerten in Form von Brüchen, also rationalen Zahlen, hat man auch versucht, Näherungen durch Quadratwurzeln anzugeben. Bei Brahmagupta (598 bis etwa 665 n.Chr.), einem indischen Mathematiker, findet man mit $\pi \approx \sqrt{10}$ einen relativ ungenauen Wert. Dagegen ist die von dem französischen Juristen und Mathematiker François Viète (1540–1603), auch Vieta genannt, gefundene Näherung $\pi \approx 1{,}8 + \sqrt{1{,}8}$ auf drei Dezimalen genau. Hierher gehört auch die von Adam Kochanski 1685 angegebene Näherung
$\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$.
Wesentliche Fortschritte zur Bestimmung von π brachten neue Ideen zu Näherungsverfahren wie etwa das von Nikolaus von Kues (1401–1464). Auf der anderen Seite versuchte man, π durch unendliche Produkte oder Summen zu beschreiben. Die bekannteste Darstellung stammt von Gottfried Leibniz (1646–1716):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \ldots$$

Für eine praktische Berechnung der Zahl π ist diese Darstellung aber ungeeignet. Um π auf nur zwei Dezimalen genau zu erhalten, muss man etwa 300 Summanden addieren.
Besser geeignet ist

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} + \ldots\right),$$

womit der englische Astronom Abraham Sharp (1651–1742) die Zahl π auf 72 Dezimalen genau berechnete. Heute hat man π mithilfe von Computern auf über 10 Billionen Dezimalstellen (Stand: 2013) genau berechnet.

Ein praktischer Nutzen von π mit vielen Dezimalen liegt in der Möglichkeit, die Computer-Hardware und -Software zu testen, da kleine Rechenfehler zu vielen falschen Stellen von π führen würden.

Zum Schluss ein „literarischer" Spaß:
Weinmeister hat 1878 einen Merkvers für die Zahl π gedichtet. Notiert man zu jedem Wort die Anzahl der Buchstaben, so erhält man π auf 23 Dezimalstellen:

„Wie, o dies π
macht ernstlich so vielen viele Müh!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein."

„Jünglinge" lässt sich hierbei auch durch „Mägdelein" ersetzen, ohne dass sich die beschriebene Näherung für π ändert.

3,141…
Bestimme mithilfe des Gedichtes die nächsten 20 Dezimalstellen von π.

Rückblick

Kreis
Für einen Kreis mit dem Radius r bzw. Durchmesser d gilt:
Umfang: $u = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$
Flächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2$

Dabei gilt für die Kreiszahl π:
$\pi \approx 3{,}14$
π ist eine irrationale Zahl.

Für einen Kreis mit d = 8 cm gilt:
Radius r = 4 cm

Umfang:
$u = \pi \cdot d = \pi \cdot (8\,cm) \approx 25{,}1\,cm$

Flächeninhalt:
$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (4\,cm)^2 \approx 50{,}3\,cm^2$

Kreisteile

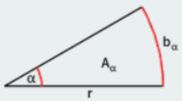


Fig. 1

Für einen Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel α gilt:
Länge b_α des **Kreisbogens**: $b_\alpha = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°}$
Flächeninhalt des **Kreissektors**: $A_\alpha = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360°}$

Ein Kreisausschnitt hat den Zentriwinkel α = 75° und den Radius r = 6,0 cm.

Länge des Bogens:
$b_{75°} = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°} = \frac{\pi \cdot 6{,}0\,cm \cdot 75°}{180°} \approx 7{,}85\,cm$

Flächeninhalt des Kreisausschnitts:
$A_{75°} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot (6{,}0\,cm)^2 \cdot 75°}{360°} \approx 23{,}6\,cm^2$

Volumen und Oberflächeninhalt von Zylindern
Ein Körper, der begrenzt wird von zwei zueinander parallel liegenden, kongruenten Kreisflächen als Grund- und Deckfläche und einer gekrümmten Mantelfläche, die abgewickelt ein Rechteck ergibt, heißt Zylinder.
Für einen Zylinder mit dem Grundflächeninhalt A_G, dem Mantelflächeninhalt A_M, der Höhe h und dem Radius r gilt:
Volumen: $V = A_G \cdot h = \pi r^2 h$
Oberflächeninhalt: $A_O = 2A_G + A_M = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$

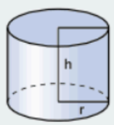


Fig. 2

Volumen und Oberflächeninhalt von Kreiskegeln
Ein Körper, der begrenzt wird von einer Kreisfläche als Grundfläche und einer gekrümmten Mantelfläche, die abgewickelt einen Kreisausschnitt ergibt, heißt Kreiskegel.
Für einen Kegel mit dem Grundflächeninhalt A_G, dem Mantelflächeninhalt A_M, der Höhe h, der Mantellinienlänge s und dem Radius r gilt:
Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Oberflächeninhalt: $A_O = A_G + A_M = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s)$

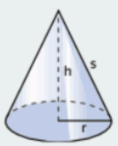


Fig. 3

Volumen und Oberflächeninhalt von Kugeln
Ein Körper, der von einer gleichmäßig gekrümmten Oberfläche begrenzt wird, heißt Kugel.
Für eine Kugel mit dem Radius r gilt:
Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Oberflächeninhalt: $A_O = 4\pi r^2$

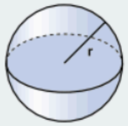


Fig. 4

Training

1 Berechne für einen Kreis mit dem Radius r, dem Durchmesser d, dem Umfang u und dem Flächeninhalt A die jeweils fehlenden Größen.
a) r = 3,58 m
b) A = 5,0 cm
c) d = 1,00 m
d) $u = 14\,cm \cdot \pi$

2 Ein Ausschnitt eines Kreises mit dem Radius r hat den Zentriwinkel α, die Bogenlänge b_α und den Flächeninhalt A_α. Berechne die jeweils fehlenden Größen.
a) r = 9,5 cm; α = 35°
b) b_α = 7,5 cm; r = 2,5 cm
c) b_α = 12 cm; α = 60°
d) $A_\alpha = 17{,}6\,cm^2$; r = 4 cm

3 Sechs Eurostücke werden in eine Schachtel mit rechteckigem Boden gelegt (Fig. 1).
a) Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die die Eurostücke bedecken.
b) Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die die Schachtel mindestens haben muss.


Fig. 1
Ein Eurostück hat den Durchmesser 23,25 mm.

4 Ein Pizzabäcker bietet Pizzen mit Durchmessern zwischen 25 und 50 cm an. Von einer Pizzagröße zur nächsten nimmt der Durchmesser jeweils um 5 cm zu.
a) Berechne, um wie viel der Umfang der Pizzen von Größe zu Größe zunimmt.
b) Die kleinste Pizza kostet 4,50 €. Wie teuer sollten die anderen Pizzagrößen sein, damit die Preise „fair" sind.

5 Berechne für den angegebenen Körper das Volumen und den Oberflächeninhalt.
a) Zylinder mit r = 24,2 cm; h = 55,3 cm
b) Kugel mit r = 1,2 m
c) Kegel mit r = 3 cm; h = 4 cm; s = 5 cm
d) Zylinder mit r = 1,5 dm; h = 2 m

6 Wie verändert sich
a) der Umfang eines Kreises, wenn man den Radius verfünffacht?
b) das Volumen eines Zylinders, wenn man den Radius vervierfacht und die Höhe halbiert?
c) das Volumen einer Kugel, wenn man den Durchmesser verdreifacht?

7 a) Berechne für die Körper in Fig. 2 und 3 das Volumen, den Oberflächeninhalt und die Masse, wenn sie aus Stahl (Dichte: $\varrho = 7{,}8\,\frac{g}{cm^3}$) sind.
b) Zeichne das Zweitafelbild der Körper in Fig. 2 und 3.
c) Ermittle das Volumen für die Körper in Fig. 4 und 5 in Abhängigkeit von a. Vereinfache.

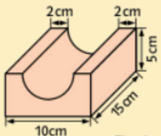


Fig. 2

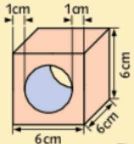


Fig. 3

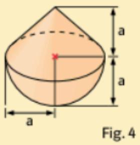


Fig. 4

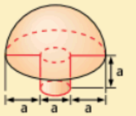


Fig. 5

8 Eine Flugzeughalle hat die Form eines Halbzylinders mit dem Radius r = 8 m und der Länge l = 30 m.
a) Untersuche rechnerisch, ob eine Heizung, die für 5000 m³ ausgelegt ist, in die Halle eingebaut werden sollte.
b) Die gewölbte Dachfläche soll mit Zinkblech bedeckt werden. Berechne, wie viele Quadratmeter Blech man benötigt, wenn man für den Verschnitt noch 5 % dazurechnen muss.

Lösungen auf Seite 245.

Siehe Lerneinheit 4, Seite 211

1. Was uns Daten sagen können

Die nebenstehende Tabelle stellt dar, wie die Mannschaften der 1. Fußballbundesliga nach dem 21. Spieltag der Saison 2012/13 platziert waren und sagt aus, wie viele Spiele jede Mannschaft bisher gewonnen, unentschieden gespielt oder verloren hat. Sie gibt auch an, wie viele Punkte jede Mannschaft bisher erreicht hat, wie viele Tore sie schon geschossen und wie viele Gegentore sie bisher kassiert hat. Sie gibt aber keine Auskunft darüber, wie viele Heim- oder Auswärtsspiele jede einzelne Mannschaft bisher absolviert hat. Genau so wenig kann man erkennen, ob Bayern München erst einmal oder schon zweimal gegen Borussia Dortmund gespielt hat. Aus der Tabelle kann man auch nicht ablesen, ob eine Mannschaft zum Beispiel in den letzten Spielen etwa sehr erfolgreich war oder vielleicht eine Niederlagenserie hatte.

Bundesliga

21. Spieltag						
1. Bayern München	21	17	3	1	55: 7	54
2. Borussia Dortmund	21	11	6	4	47:26	39
3. Bayer Leverkusen	21	11	5	5	41:29	38
4. Eintracht Frankfurt	21	11	4	6	38:31	37
5. SC Freiburg	21	8	7	6	26:20	31
6. FSV Mainz	21	9	4	8	28:25	31
7. Hamburger SV	21	9	4	8	26:27	31
8. Mönchengladbach	21	7	9	5	31:32	30
9. Hannover	21	9	2	10	39:39	29
10. FC Schalke 04	21	8	5	8	33:35	29
11. Werder Bremen	21	8	4	9	36:38	28
12. VfL Wolfsburg	21	7	5	9	22:30	26
13. 1. FC Nürnberg	21	6	7	8	20:27	25
14. VfB Stuttgart	21	7	4	10	23:39	25
15. Düsseldorf	21	6	6	9	26:29	24
16. TSG Hoffenheim	21	4	4	13	26:45	16
17. FC Augsburg	21	2	9	10	17:33	15
18. Greuther Fürth	21	2	6	13	13:35	12

Überlege dir, welche der folgenden Fragen mit Hilfe dieser Tabelle eindeutig beantwortet werden können:

1. Welche Mannschaft hat bis zu diesem Zeitpunkt die meisten Unentschieden?
2. Welche Mannschaft verfügt über die wirkungsvollsten Angreifer?
3. Könnte es sein, dass Stuttgart die längste Siegesserie (d.h. hinter einander gewonnene Spiele) erzielt hat?
4. Ist es auf Grund dieser Tabelle möglich festzustellen, ob in den letzten sieben Spielen Greuther Fürth oder Bayern München erfolgreicher war?

Siehe Lerneinheit 4, Seite 211

2. Wie man Daten auswerten kann

Sven und Paul sind sportlich aktiv und eine ihrer Trainingseinheiten besteht darin, 10-mal einen Schlagball möglichst weit zu werfen. Sie erzielen dabei folgende in Meter gemessene Weiten:

Sven 27, 29, 23, 31, 22, 36, 35, 29, 23, 21
Paul 23, 25, 30, 29, 33, 32, 29, 20, 17, 38

Natürlich möchten sie die erzielten Ergebnisse vergleichen und einigen sich dabei auf folgendes Vorgehen:

- Berechnen der bei seinen Würfen durchschnittlich erzielte Weite.
- Ermitteln der bei den 10 Würfen in der Mitte liegenden Weite (hier das Mittel von fünft- und sechstbester Weite).
- Ermitteln der Differenz zwischen größter und kleinster erzielter Weite.

Welche Ergebnisse treten dabei bei Sven und Paul auf? Wenn der Verein nur einen der zwei zu einem Wettkampf im Schlagballweitwurf entsenden darf, wen sollte er dann entsenden? Wen würdest du empfehlen und wie würdest du deine Entscheidung begründen?

Siehe Lerneinheit 4, Seite 211

3. Wie man Daten darstellen kann

Für den bevorstehenden Wandertag wurden in der Klasse vier Ziele ins Auge gefasst, über die man schließlich abstimmte. Dabei stimmten für das Ziel A 28 %, für B 44 %, für C 12 % und für das Ziel D 16 %. Das Ergebnis der Abstimmung sollte an der Wandzeitung grafisch veranschaulicht werden. Durch den Wandzeitungsredakteur wurden dafür folgende drei Vorschläge unterbreitet (Fig. 1 bis Fig. 3):

Fig. 1

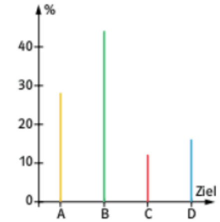


Fig. 2

Fig. 3

Welchen dieser Vorschläge würdest du unterstützen und wie würdest du deine Entscheidung begründen?

Siehe Lerneinheit 4, Seite 211

4. Wie man mit Daten mogeln kann

(1) Die Zwillinge Katja und Ron hatten in der Mathematikarbeit, die sie heute zurückbekamen, beide die Note 3 erhalten. Der Notenspiegel für diese Klassenarbeit sah folgendermaßen aus.

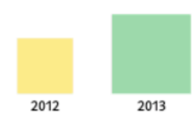
Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	4	10	2	5	7	0

Ohne ihre Note zu nennen berichtete Katja den Eltern stolz, dass sie in der Mathematikarbeit besser war als der Durchschnitt der Klasse. Befragt nach der Leistung ihres Bruders, sagt sie, der gehörte leider nicht zu besseren Hälfte der Klasse.
Muss sie nicht zwangsläufig bei einer ihrer Aussagen die Unwahrheit gesagt haben?

(2) Das Reisebüro „Gullivers Reisen" hat innerhalb eines Jahres seine Kundenzahl verdoppelt und will mit diesem Erfolg weitere Kunden werben.
Für Prospekte und Plakate stehen folgende Entwürfe zur Diskussion:

Gullivers Reisen

Gullivers Reisen



Welche Darstellung ist deiner Meinung nach korrekt und weshalb?

1 Erhebung von Daten

„Jeder zweite Deutsche hat schon einmal die Unwahrheit gesagt.“
„Meine Güte, in Deutschland wohnen circa 85 Millionen Menschen. Das muss ja sehr lange gedauert haben, bis man die alle befragt hat.“

Um genauere Informationen über die Gewohnheiten einer sehr großen Anzahl von Personen zu erhalten werden **statistische Erhebungen** durchgeführt. Beispiele für solche statistischen Erhebungen sind u. a. Umfragen oder Verkehrskontrollen. Häufig ist es zu aufwändig alle Personen zu befragen, daher wählt man gezielt eine kleinere Gruppe von Personen aus. Diese ausgewählte Teilgruppe nennt man **Stichprobe**. Sie muss die gleichen Eigenschaften wie die gesamte Gruppe – die so genannte **Gesamtheit** – aufweisen. Man befragt die Mitglieder der Stichprobe und überträgt die Ergebnisse auf die Gesamtheit.

> Die Menge aller Personen oder Dinge, über die man etwas wissen möchte, nennt man **Gesamtheit**. Die Menge der ausgewählten Personen oder Dinge, die man befragt oder untersucht, nennt man **Stichprobe**.
> Eine Stichprobe heißt **repräsentativ**, wenn ihre Eigenschaften mit denen der Gesamtheit weitgehend übereinstimmen.

Fragebogen zur Handynutzung
☐ *Mädchen* ☐ *Junge*
Wie viele SMS verschickst du pro Woche?
☐ *0 – 4*
☐ *5 – 8*
☐ *9 – 12*
☐ *13 – 16*
☐ *17 – 20*
☐ *21 – 24*
☐ *25 – 28*
☐ *29 – 32*
☐ *33 – 36*
☐ *37 – 40*
☐ *mehr als 40*

Fig. 1

Zur Erinnerung: *Anteile werden häufig in Prozent angegeben.*

Beispiel Handynutzung
Mithilfe eines Fragebogens (s. Fig. 1) will die Klasse 9b herausfinden, wie viele SMS die Schülerinnen und Schüler der neunten Klassen ihrer Schule pro Woche versenden.
Lösung:
Um nicht den gesamten Jahrgang (Gesamtheit) befragen zu müssen, wählt die Klasse sich selbst und eine Parallelklasse als Stichprobe. Die beiden ausgewählten Klassen haben vergleichbare Eigenschaften wie die anderen neunten Klassen ihrer Schule, die Stichprobe ist also repräsentativ.
Die Klasse sammelt die Ergebnisse in einer Tabelle und stellt sie grafisch dar (siehe Fig. 2).

Anzahl SMS/ Woche	Häufigkeit Jungen	Häufigkeit Mädchen
0 bis 4	17	11
5 bis 8	3	2
9 bis 12	0	1
13 bis 16	0	4
17 bis 20	0	1
21 bis 24	0	1
25 bis 28	1	2
29 bis 32	1	0
33 bis 36	1	1
37 bis 40	0	0
mehr als 40	0	6

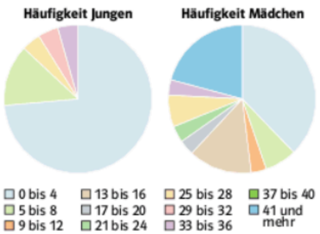


Fig. 2

Aus den Diagrammen kann man ablesen, dass etwa drei Viertel der Jungen nur 0 bis 4 SMS pro Woche verschicken. Bei den Mädchen beträgt dieser Anteil etwa ein Drittel. Man kann auch ablesen, dass etwa ein Fünftel der Mädchen, aber keiner der Jungen der Stichprobe 41 und mehr SMS monatlich verschickt. Insgesamt lässt sich bei dieser Stichprobe feststellen, dass die Mädchen mehr Kurznachrichten als die Jungen versenden. Da die Stichprobe repräsentativ ist, kann man diese Aussagen auf die gesamte Jahrgangsstufe übertragen.

Aufgaben

1 Um zu entscheiden, ob vor einer Schule eine Geschwindigkeitsbegrenzung eingeführt werden soll, ist die Durchführung einer Verkehrszählung geplant.
a) Was ist die Gesamtheit?
b) Wie sollte die Stichprobe gewählt werden? Begründe deine Antwort.

2 Schülerinnen und Schüler wählen in verschiedenen Bundesländern zu verschiedenen Zeiten ihre zweite Fremdsprache. In den vergangenen Jahren blieb das Wahlverhalten im Wesentlichen unverändert. Im letzten Schuljahr wählten an der Marie-Curie-Schule 84 Schüler Französisch, 59 wählten Latein.
a) Lassen sich die Erfahrungen zum Wahlverhalten aus den vergangenen Schuljahren auf die anstehende Wahl übertragen?
b) Falls man von gleich bleibendem Wahlverhalten ausgehen darf, wie viele Schüler werden wohl Französisch wählen, wenn der Jahrgang aus 134 Schülern besteht?

3 Überprüfe die folgenden Stichproben und gib jeweils an, ob sie für die Gesamtheit repräsentativ sind. Erläutere andernfalls, wie die Stichprobe verändert werden muss.
a) In einer Autowerkstatt wird einen Werktag lang jeder fünfte Kunde befragt, ob er mit den Arbeiten der Werkstatt zufrieden ist.
b) Herr Schmidt kauft eine Großpackung Glühbirnen. Um herauszufinden, ob alle Glühbirnen funktionieren, nimmt er die oberste Lage heraus und prüft diese.

Info

> **Ordnen von Daten einer Stichprobe**
> Kann man innerhalb einer Stichprobe Daten ordnen und auf diese Weise eine Reihenfolge festlegen, z. B. bei Schulnoten, Körper- oder Schuhgrößen, so entsteht eine **Ordinalskala**. Sind die Abstände zwischen je zwei benachbarten Folgegliedern einer Ordinalskala gleich groß, dann bezeichnet man diese als **metrische Skala**. Lassen sich die Daten nicht eindeutig in eine Reihenfolge bringen, so erhält man eine **Nominalskala**. Das ist z. B. bei Eigenschaften wie Farben oder Geschlecht der Fall. Große Datenmengen, die bei statistischen Erhebungen gewonnen werden, stellt man häufig in Diagrammen dar, um eine bessere Übersicht zu gewinnen oder um Prognosen anstellen zu können. Dazu ordnet man, sofern möglich, zuerst die Daten.

Beispiel Ordinalskala: Noten im Vokabeltest: 2, 4, 3, 1, 6, 3, 5, 2, 2, 2, 1, 4, 1, 4, 2, 1
Beispiel Nominalskala: Lieblingsfarbe: rot, blau, gelb, grün, grün, rot, weiß, blau, blau, blau, schwarz

4 An einer Blutspendeaktion nahmen 83 Personen mit Blutgruppe A, 31 Personen mit Blutgruppe B, 14 Personen mit Blutgruppe AB und 78 Personen mit Blutgruppe 0 teil.
a) Passen diese Zahlen zu der in Fig. 1 dargestellten Verteilung der Blutgruppen?
b) Was sind in diesem Beispiel die Stichprobe und die Gesamtheit?
c) Lässt sich das Merkmal „Blutgruppe“ auf einer Nominal- oder einer Ordinalskala darstellen?

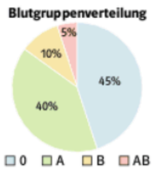


Fig. 1

2 Lagemaße

	Klasse 9a	Klasse 9b
1	–	12
2	4	–
3	11	–
4	14	–
5	3	–
6	–	12

Angelina: „Oh je, der Notendurchschnitt unserer Mathearbeit beträgt nur 3,5." Berit: „Der Notendurchschnitt unserer Klasse ist auch 3,5, aber wir sind besser!"

Der Durchschnitt heißt auch ***arithmetisches Mittel****. Kurz:* $\bar{x}$

Tina	Mareike
8,4 s	8,5 s
8,8 s	8,3 s
8,9 s	8,8 s
8,6 s	8,7 s
8,6 s	9,0 s
8,7 s	8,8 s
8,5 s	8,4 s

Zwischen Tina und Mareike soll sich entscheiden, wer von ihnen bei einem 50-m-Lauf für den Verein starten darf. Ihre durchschnittlichen Laufzeiten in sieben Läufen (jeweils 60,5 s : 7) sind genau gleich und damit als Entscheidungskriterium nicht geeignet. Ein genauerer Vergleich der Laufzeiten zeigt, dass Tina am häufigsten 8,6 s benötigte, Mareike hingegen 8,8 s. Diesen am häufigsten vorkommenden Wert nennt man **Modalwert**. Zudem fällt auf, dass Mareikes Laufzeiten stärker streuen als Tinas. Mareikes Werte streuen zwischen 8,3 s und 9,0 s, Tinas nur zwischen 8,4 s und 8,9 s. Sie lief insgesamt beständiger. Ordnet man die jeweiligen Laufzeiten nach der Größe, so liegt bei Tina 8,6 s genau in der Mitte, bei Mareike 8,7 s. Diesen mittleren Wert nennt man **Zentralwert** oder **Median**. Tina darf starten, da bei ihren Leistungen Modalwert und Median kleiner sind und sie beständiger ist.

Den Median kann man nur bei Ordinalskalen angeben.
Den kleinsten Wert nennt man auch ***Minimum*** *(kurz: Min), den größten Wert* ***Maximum*** *(kurz: Max).*

Modalwert, Median und arithmetisches Mittel bezeichnet man auch als **Lagemaße**.
Der **Modalwert** ist der häufigste Wert in einer Liste, er wird mit m bezeichnet.
Der **Median** (Zentralwert) ist der in der Mitte liegende Wert einer geordneten Liste.
Der Median teilt einen Datensatz in zwei Hälften. Man schreibt dafür z.

Der Abstand zwischen dem größten und dem kleinsten Wert heißt **Spannweite**, kurz: d.

Beispiel 1 Ausgaben
Fabian notiert während einer Klassenfahrt seine Ausgaben.

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ausgaben in €	2,60	3,80	2,24	1,10	3,70	2,63	1,40	1,10	7,34	1,91

Gib für die Ausgaben a) die Spannweite, b) den Modalwert und c) den Median an.
Lösung:
a) Niedrigste Ausgabe (Min): 1,10 €
Höchste Ausgabe (Max): 7,34 €.
Spannweite s = 7,34 € – 1,10 € = 6,24 €.
b) 1,10 € ist der Modalwert.
c) *Ist die Anzahl der Werte gerade, nimmt man als Median das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte:*
Median: z = (2,24 € + 2,60 €) : 2 = 2,42 €

Geordnete Liste:
1,10 €; 1,10 €; 1,40 €; 1,91 €; 2,24 €; 2,60 €; 2,63 €; 3,70 €; 3,80 €; 7,34 €

Beispiel 2 Übernachtungszahlen
Die Tabelle (s. Fig. 1) zeigt die Aufenthaltsdauer von Touristen in einer Urlaubsregion.
a) Welche Bedeutung hat der Modalwert?
b) Berechne das arithmetische Mittel der Aufenthaltsdauern.

Aufenthaltsdauer	Anzahl
Ein Tag	280
Wochenende	130
Eine Woche	112
Zwei Wochen	130
Drei Wochen	51

Fig. 1

Lösung:
a) Die am häufigsten vorkommende Aufenthaltsdauer ist ein Tag.
b) $\bar{x} = (280 \cdot 1 + 130 \cdot 2 + 112 \cdot 7 + 130 \cdot 14 + 51 \cdot 21) : (280 + 130 + 112 + 130 + 51) = 4215 : 703 \approx 6$
Im Mittel bleiben die Touristen ca. sechs Tage lang in dieser Urlaubsregion.

Aufgaben

1 In einer 9. Klasse werden Schülerinnen und Schüler nach ihrem Gewicht befragt.

Junge/Mädchen	J	J	M	J	M	J	M	M	J	J	J	J	J	M
Gewicht (in kg)	69,7	45	k. A.	47	45	62	42	43	59	43	k. A.	65	38	54

Junge/Mädchen	J	M	J	J	J	M	J	J	J	J	M	M	J	M
Gewicht (in kg)	40	52	70	58	79	55	41	58,5	43	40	50	45	k. A.	k. A.

a) Bestimme den Modalwert, das arithmetische Mittel, den Median und die Spannweite.
b) Welche dieser Werte verändern sich, wenn man das Gewicht der Lehrerin hinzunimmt? Begründe deine Antwort.

Tipp:
Um den größten und den kleinsten Wert einer Liste zu bestimmen, kann man mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms die Werte ordnen lassen.

Die Abkürzung k. A. bedeutet „keine Angabe".

2 Lena schreibt in Latein in sechs Vokabeltests die Noten 2, 2, 5, 2, 3, 1. Welche Note sollte sie erhalten? Begründe deine Antwort unter Verwendung der Lagemaße und der Spannweite.

Bist du sicher?

1 Ermittle den Modalwert, den Median und das arithmetische Mittel für den Notenspiegel der Klassenarbeit (s. Fig. 1).

Note	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	2	5	12	8	0	2

Fig. 1

3 Herr Sang notiert in einer Strichliste über mehrere Monate seinen Benzinverbrauch.

<table>
<tr><td>Verbrauch in l/100 km</td><td>5,8</td><td>6,0</td><td>6,1</td><td>6,5</td><td>6,6</td></tr>
<tr><td>Häufigkeit</td><td>|||||</td><td>||</td><td>|||</td><td>|||||</td><td>|</td></tr>
</table>

a) Gib die Spannweite und mögliche Ursachen dafür an.
b) Berechne die Lagemaße und begründe, welches sich für die Angabe des durchschnittlichen Benzinverbrauchs eignet.
c) Herr Sang macht eine weitere Autobahnfahrt und verbraucht 7,0 l auf 100 km. Welche Auswirkungen hat das auf Lagemaße und Spannweite?

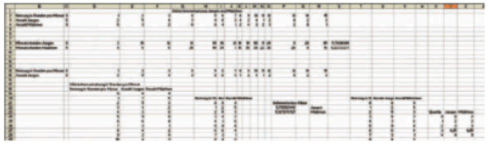
4 Ein mathematisches Dorf
Stell dir vor, dass es in einem kleinen Dorf 35 Arbeitnehmer gibt. Sieben von ihnen verdienen monatlich 500 €, acht verdienen 1000 €, zwölf von ihnen 1500 € und acht 2000 €.
a) Bestimme die Lagemaße und gib die Spannweite an.
b) Wie verändern sich die Werte aus a), wenn eine weitere Person in das Dorf zieht, die ein monatliches Einkommen von 1000 000 € hat?
c) Erläutere, warum manche Lagemaße von „Ausreißern" beeinflusst werden. Gib ein eigenes Beispiel an, bei dem sich die Lagemaße verändern, wenn Ausreißer hinzukommen.

5 a) Gib eine Stichprobe mit sieben Werten an, bei der das arithmetische Mittel und der Median übereinstimmen.
b) Welcher Mittelwert eignet sich zur Auswertung der Erhebung über die persönliche Lieblingsfarbe (s. Fig. 2)? Begründe.

Farbe	Anzahl
Rot	13
Grün	25
Gelb	12
Blau	20
Sonstige	7

Fig. 2

3 Boxplots



Ich habe gar keinen Überblick.

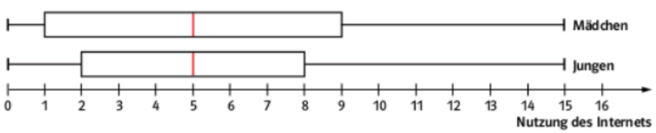
In einer Umfrage wurden 58 Jungen und 55 Mädchen danach befragt, wie viele Stunden sie monatlich das Internet nutzen. Das Ergebnis der Umfrage ist in der Tabelle dargestellt.

Anzahl Stunden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Jungen	8	2	5	4	3	9	6	3	4	2	4	1	2	0	2	3
Mädchen	9	5	3	2	6	8	4	1	2	4	3	2	3	2	0	1

Die Jungen benutzen das Internet durchschnittlich etwa 5,8 h pro Monat, die Mädchen ca. 5,3 h. Da die arithmetischen Mittelwerte sich nicht deutlich voneinander unterscheiden, ergibt es Sinn, sich die Streuung und die Verteilung der Daten genauer anzuschauen. Dazu ordnet man sie nach ihrer Größe und stellt sie in einem Diagramm dar. Ein besonderes Diagramm, in dem der kleinste und der größte Wert sowie der Median erkennbar sind, ist der **Boxplot**. Um diesen zu zeichnen, ordnet man zunächst alle Werte der Größe nach, liest Minimum und Maximum ab und bestimmt den Median. Auf diese Weise erhält man die **obere** und die **untere Hälfte** aller Werte. Von beiden Hälften bestimmt man ebenfalls die Mediane und erhält so das **obere** und das **untere Viertel** sowie die **mittlere Hälfte** aller Daten.

*Die mittlere Hälfte aller Daten (die mittleren 50 %) wird mit einer **Box** dargestellt, das untere und das obere Viertel durch so genannte **Antennen**.*

Boxplots können waagerecht oder senkrecht dargestellt werden.



Man erkennt u.a., dass die größten und kleinsten Werte, die Spannweiten und die Mediane beider Gruppen gleich sind. Im Boxplot der Mädchen ist die Box mit der mittleren Hälfte der Daten länger als bei den Jungen. Das bedeutet, dass die Nutzungsdauern des Internets der mittleren 50 % der Mädchen stärker streuen, als die entsprechenden Zeiten der Jungen.

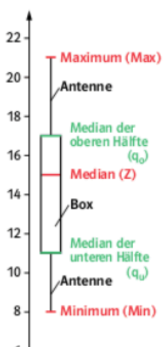


Fig. 1

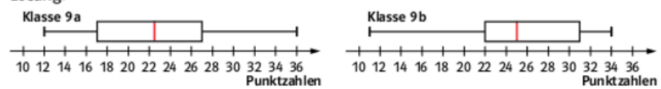
Die Darstellung von Erhebungsdaten im Boxplot (Fig. 1) erfordert folgende Schritte:
1. Daten der Größe nach ordnen.
2. Kleinsten Wert (Minimum), größten Wert (Maximum) und den Median bestimmen.
3. Alle Daten in die obere und die untere Hälfte einteilen.
4. Mediane der oberen und der unteren Hälfte, auch **Quartilen** genannt, bestimmen. Für den Median der unteren Hälfte schreibt man q_u, für den der oberen Hälfte q_o.

Die Daten der mittleren Hälfte werden durch eine **Box** dargestellt, die Daten des oberen und des unteren Viertels durch **Antennen**.

Beispiel Punkteverteilungen
Die Tabelle gibt an, welche Punktzahlen die Schülerinnen und Schüler in einer Mathematikarbeit erreicht haben. Nutze die auf Seite 208 gegebenen Erläuterungen zum Zeichnen der zugehörigen Boxplots und interpretiere diese.

Punkte	11	12	13	15	16	17	19	20	21	22	23	24	26	27	28	29	30	31	32	34	35	36	37	38
9a	0	1	1	1	2	1	0	2	1	2	2	0	2	2	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
9b	1	1	0	1	0	0	1	0	2	2	2	3	4	0	1	0	1	4	2	1	0	0	0	0

Lösung:



Der Boxplot der Klasse 9b zeigt, dass die erreichten Punktzahlen in der oberen Hälfte der Daten viel weniger streuen (von 25 bis 34 Punkten) als in der unteren Hälfte (von 11 bis 24), also müssen die im unteren Bereich erreichten Punktzahlen sehr weit auseinander liegen. Ein Vergleich der oberen Antennen beider Klassen zeigt, dass die Punktzahlen der besten 25 % der Schülerinnen und Schüler der Klasse 9a über neun Punkte streuen, die der Klasse 9b nur über drei Punkte. Sowohl der Median, als auch die beiden Quartile sind in Klasse 9b größer als in Klasse 9a.

Aufgaben

1 Zeichne die Boxplots zu den angegebenen Werten.
a) Min = 0; Median der unteren Hälfte: $q_u = 15$; Median: $z = 23$; Median der oberen Hälfte: $q_o = 27$; Max = 35.
b) 10; 3; 1; 4; 2; 2; 9; 8; 11; 2; 5; 8; 8.

2 a) Vergleiche die beiden dargestellten Boxplots. Betrachte dabei die Längen der Antennen und die Formen der Boxen. Was kann man über die Daten aussagen?

b) Die Daten der mittleren Hälfte einer Rangliste streuen stark um den Median. Die Daten im oberen Viertel streuen nur wenig und die Daten im unteren Viertel streuen stark. Skizziere einen passenden Boxplot.

*Werden die Werte einer Liste der Größe nach sortiert, so bezeichnet man sie als **Rangliste**. Ranglisten können nur von ordinalen Daten aufgestellt werden.*

3 Die Schüler einer Klasse werden befragt, wie viele Stunden ihrer Freizeit sie wöchentlich am Computer verbringen oder fernsehen. Ihre Antworten lauten:
5, 9, 25, 25, 5, 48, 3, 9, 18, 4, 62, 34, 18, 32,
6, 34, 56, 18, 7, 25, 71, 20, 18, 22, 39, 4, 26, 50
a) Stelle die Werte in einem Boxplot dar.
b) Bei wie vielen Schülern sind es wöchentlich mehr als 8 Stunden?
c) Welche der folgenden Aussagen sind mit dem dargestellten Boxplot belegbar?
– Bei weniger als der Hälfte der Jugendlichen sind es höchstens 17 Stunden.
– Die durchschnittliche Zahl der Stunden, die die Schüler wöchentlich vor dem Computer oder dem Fernseher sitzen, ist geringer als die Wochenzahl an Unterrichtsstunden.
– Bei mindestens einem Viertel der Befragten sind es wenigstens 33 Stunden.

4 Beim Sportfest haben alle Klassen Geld gesammelt. In der Zeitung sollen einige Aussagen zum Spendenverhalten der Klassen erscheinen. Die gerundeten Beträge sind:
12 €; 16 €; 17 €; 17 €; 17 €; 19 €; 20 €; 20 €; 20 €; 20 €; 20 €; 20 €; 21 €; 21 €; 22 €; 29 €
a) Stelle die Daten erst in einem Säulendiagramm und dann in einem Boxplot dar.
b) Vergleiche beide grafischen Darstellungen. Für welche Aussagen ist das Säulendiagramm und für welche Aussagen ist der Boxplot besser geeignet?

5 Neun Schüler haben ihren Pulsschlag über eine viertel Minute gezählt, zuerst ihren Ruhepuls, dann jeweils nach 10, 20, 30 Kniebeugen.
a) Veranschauliche die Daten der drei Spalten durch je einen Boxplot.
b) Untersuche, ob der Puls nach jeweils 10 Kniebeugen durchschnittlich um den gleichen Wert anwächst.
c) Führe dieses Experiment selber durch und fasse die „am eigenen Leib gemachten" Beobachtungen zusammen.

	Ruhe	10	20	30
Dennis	19	30	39	42
Oliver	22	35	39	41
Michael	21	34	38	40
Stefan	16	25	28	30
Tobi	18	32	33	35
Sven	19	28	32	35
Marc	23	35	40	40
Christopher	15	23	25	27
Thorsten	29	35	36	40

Bist du sicher?

1 a) Zeichne einen Boxplot zu der Zahlenliste −1; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 6; 6; 6; 7; 8; 16; 20.
b) Muss der Median immer im Innern der Box liegen? Begründe.
c) Kann es Boxplots „ohne Antennen" geben? Begründe anhand von Zahlenbeispielen.

6 Eine Maschine verpackt Pralinenpackungen zu 500 g. Vier verschiedene Einstellungen lieferten bei Kontrollen des Verpackungsgewichts die Boxplots aus Fig. 1.
Welche Einstellung ist besonders günstig
a) für die Pralinenfirma,
b) für den Kunden?
c) Wie sieht der Boxplot einer für den Produzenten idealen Verpackungsmaschine aus?

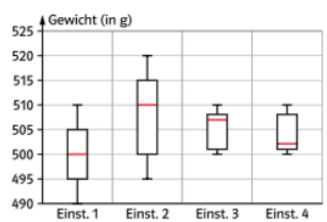


Fig. 1

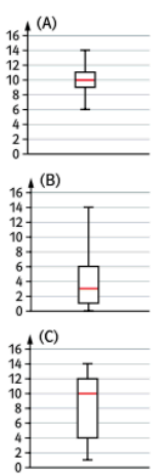


Fig. 3

7 Bei einem Test gab es maximal 16 Punkte.
Fig. 2 zeigt die Ergebnisse für drei Testgruppen von je 100 Personen.
a) Beschreibe in Worten, wie der Test ausgefallen ist.
b) Welcher Boxplot gehört zu welchem Säulendiagramm? Begründe deine Antwort.

Fig. 2

4 Streuungsmaße

Im Mittel hat man an den Füßen eine angenehme Temperatur, wenn man einen Fuß in den Tiefkühlschrank und den anderen in kochendes Wasser hält.

Im angesprochenen Fall ist der Körper möglicherweise einer Temperatur zwischen −18 °C und 100 °C ausgesetzt. Die beeinflussenden Temperaturen streuen also zwischen diesem Maximal- und Minimalwert. Diese bei den Boxplots bereits eingeführte Spannweite zeigt uns, zwischen welchen Grenzen die Werte liegen. Die ermittelten Werte weichen zumeist vom Mittelwert ab – man sagt auch dazu, sie „streuen" um den Mittelwert.
Die **Spannweite** als Differenz aus größtem und kleinstem Wert ist also ein Maß für die **Streuung der ermittelten Werte**.

Das folgende Beispiel wird zeigen, dass das Streuungsmaß „Spannweite" für die Beschreibung einer Messreihe nicht ausreichend ist.

Zwei Stichproben sollen verglichen werden:
Stichprobe I: 15, 14, 16, 13, 17 Stichprobe II: 15, 6, 16, 18, 20
Beide Stichproben haben denselben Durchschnitt $\bar{x} = 15$ und denselben Zentralwert (Median) z = 16. Trotzdem unterscheiden sie sich wesentlich.
So beträgt die Spannweite bei der Stichprobe I 4 und bei der Stichprobe II 14.
Die Spannweite wird aber nur vom größten und vom kleinsten Wert beeinflusst, die „Streuung" der Werte kann sich aber trotzdem noch stark unterscheiden. Neben dem Durchschnitt, dem Zentralwert und der Spannweite betrachtet man daher als ein weiteres Kennzeichen einer Stichprobe die „mittlere Abweichung vom Durchschnitt $\bar{x}$":

Stichprobe I

	Werte x_i	Abweichung von $\bar{x} = 15$
	15	0
+	14	1
+	16	1
+	13	2
+	17	2
	75	6
	$\bar{x} = \frac{75}{5} = 15$	$\frac{6}{5} = 1{,}2$

Stichprobe II

	Werte x_i	Abweichung von $\bar{x} = 15$
	15	0
+	6	9
+	16	1
+	18	3
+	20	5
	75	18
	$\bar{x} = \frac{75}{5} = 15$	$\frac{18}{5} = 3{,}6$

Die mittlere Abweichung vom Durchschnitt ist bei Stichprobe II größer als bei Stichprobe I.
Man sagt dazu, die Werte von Stichprobe II „streuen" stärker als die von Stichprobe I.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n Werte einer Stichprobe und $\bar{x}$ der Durchschnitt der Werte der Stichprobe, so heißt
$$\frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$
die **mittlere Abweichung** vom Durchschnitt.

Neben Spannweite und mittlerer Abweichung können weitere Kenngrößen zur Charakterisierung einer Stichprobe verwendet werden:

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n Werte einer Stichprobe und $\bar{x}$ der Durchschnitt dieser Werte, so heißen

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

die **quadratische Abweichung** vom Durchschnitt oder **Varianz**,

und

$$s = \sqrt{s^2}$$

die **Standardabweichung**.

Beispiel

Von einer Lieferung Fahrradspeichen wurde von einer Stichprobe von 10 Speichen die genaue Länge (in mm) der Speichen gemessen:
269, 274, 269, 268, 272, 270, 269, 270, 268, 271.

a) Gib die Spannweite der Längen an.

b) Berechne die mittlere Abweichung vom Durchschnitt, die quadratische Abweichung vom Durchschnitt (Varianz) sowie die Standardabweichung.

Lösung:

a) *Die Spannweite ist die Differenz aus größtem Wert und kleinstem Wert.*
Spannweite: 274 mm − 268 mm = 6 mm.

b) Die Summe der Speichenlängen beträgt 2700, ihr Durchschnitt also 270. Für die Abweichungen ergeben sich dann die Zahlen 1, 4, 1, 2, 2, 0, 1, 0, 2, 1 mit dem Durchschnitt 1,4. Die mittlere Abweichung beträgt also 1,4 mm.
Die Quadrate der Differenzen von Stichprobenwerten und Durchschnitt sind 1, 16, 1, 4, 4, 0, 1, 0, 4, 1, d.h. die Varianz ist 3,2. Damit ergibt sich als Standardabweichung ein Wert von rund 1,79.

Aufgaben

1 Bei Liegestützen im Sportunterricht erzielten zwei Gruppen folgende Ergebnisse:
Gruppe 1: 18, 15, 12, 27, 6, 28, 16, 8, 15, 13, 29
Gruppe 2: 7, 31, 18, 11, 13, 8, 27, 19, 17, 12, 20
Berechne für jede Gruppe den Durchschnitt der erreichten Anzahl von Liegestützen, den Zentralwert, die Spannweite, die mittlere Abweichung vom Durchschnitt, die Varianz sowie die Standardabweichung.

2 Die Anzahl der Regentage beträgt im langjährigen Mittel für Amsterdam bzw. Rangun:

Monat	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Amsterdam	10	8	11	8	9	9	11	11	10	13	11	13
Rangun	1	1	1	2	13	23	25	24	20	11	4	1

a) Stelle die Verteilung der monatlichen Regentage grafisch dar.
b) Berechne für beide Messreihen den Durchschnitt der Anzahl der monatlichen Regentage, die Spannweite, die mittlere sowie die quadratische Abweichung vom Durchschnitt und die Standardabweichung.

3 Gegeben sind zehn blaue und zehn rote Zahlen:
10 6,1 10,3 7,1 8,2 12,6 10,4 5,6 1,1 10,6 9,7 5,4 3,9 8,1 3,3 4,5 4,8 12,2 8,4 7,3
a) Berechne den Durchschnitt, die Spannweite, die Varianz und die Standardabweichung.
b) Welche Werte ergeben sich, wenn man die einzelnen Zahlen ganzzahlig rundet?

4 In zwei Betrieben haben die Beschäftigten folgende Monatsgehälter (gerundet):

Gehalt in Euro	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	5000	6000	7000
Beschäftigte in Betrieb I	1	6	10	5	2	–	3	1	–	2	–
Beschäftigte in Betrieb II	1	2	5	7	3	–	1	–	–	–	1

Berechne für beide Betriebe jeweils die durchschnittliche Höhe der gerundeten Gehälter, die Spannweite, die mittlere und die quadratische Abweichung vom Durchschnitt, sowie die Standardabweichung.

5 Eine Fabrik hat die Wahl zwischen zwei gleich teuren Lieferanten von 10-mm-Bolzen. Sie hat aus den Produktionen jeweils eine Stichprobe von 12 Bolzen genommen und die Durchmesser genau vermessen. Bestimme für beide Firmen den durchschnittlichen Durchmesser der Bolzen, die Spannweiten der Durchmesser, die mittleren und die quadratischen Abweichungen vom Durchschnitt und die Standardabweichungen. Welche Firma fertigt genauer?

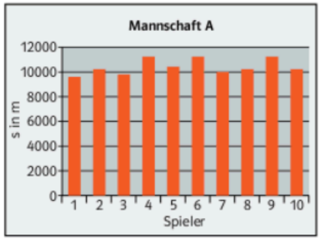
Firma Faller GmbH:
Durchmesser in mm

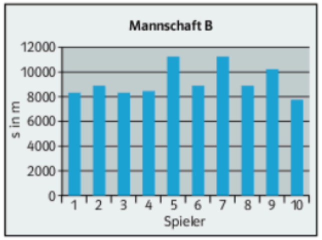
10,16	10,09	9,99	10,03	10,00	10,04
9,85	10,00	10,02	9,95	9,90	9,97

Firma Geiger & Sohn:
Durchmesser in mm

10,03	9,90	9,87	10,01	9,99	9,91
10,10	9,85	9,95	10,08	10,15	10,16

6 Nach einem Fußballspiel von Mannschaft A gegen Mannschaft B wird die Laufstärke der jeweils zehn Feldspieler statistisch ausgewertet. Dazu ist die Laufstrecke s jedes einzelnen Feldspielers beider Mannschaften gemessen und in den nachfolgenden Diagrammen grafisch dargestellt worden.

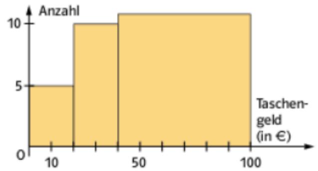




Die Berechnung des arithmetischen Mittels ergab 9395,2 m bzw. 10275,4 m. Für die Standardabweichung wurden 456,1 m bzw. 956,6 m ermittelt.
In den Unterlagen wurde versäumt, diese Werte den Mannschaften zuzuordnen.
a) Wie groß ist das arithmetische Mittel der Laufstrecken der Spieler von Mannschaft A? Begründe deine Entscheidung anhand der Diagramme.
b) Welche der beiden angegebenen Standardabweichungen ist die Standardabweichung von Mannschaft B? Verwende die oben gegebenen Diagramme zur Begründung deiner Entscheidung.

5 Histogramme

In einer neunten Klasse wurde das monatliche Taschengeld erfasst und in einem Diagramm dargestellt. Sven argumentiert nun vor seinen Eltern, dass er mit monatlich 39 € zu wenig erhält, weil die meisten Schüler aus seiner Klasse mehr als 40 € erhalten. Hat er recht?



Ein Sportverein hat drei Sparten. Die Anzahl der Mitglieder in jeder Sparte nennt man ihre **absolute Häufigkeit**, den prozentualen Anteil an der Gesamtmitgliederzahl ihre **relative Häufigkeit**. Eine gute Übersicht über die Aufteilung der Mitglieder liefert eine **Häufigkeitsverteilung**.
Häufigkeitsverteilungen werden auf unterschiedliche Weise grafisch veranschaulicht. Dies kann z.B. durch ein Kreisdiagramm oder ein Blockdiagramm geschehen.
In einem Stabdiagramm von Fig. 1 ist eingetragen, wie häufig welche Punktzahlen in einer Sportlergruppe während eines Wettkampfs erreicht wurden. Diese Darstellung ist nicht sehr übersichtlich, da viele Ergebnisse auftreten. In solchen Fällen fasst man oft mehrere Ergebnisse zusammen, indem der Bereich der Ergebnisse in gleich breite **Klassen** eingeteilt wird.

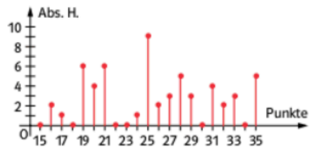


Fig. 1

Je nach Klasseneinteilung ergeben sich aus demselben Stabdiagramm ganz unterschiedliche Diagramme (vgl. Fig. 2 und 3).

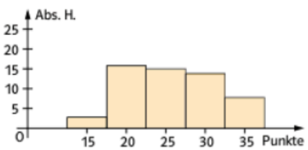


Fig. 2

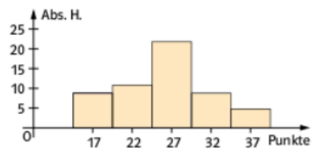
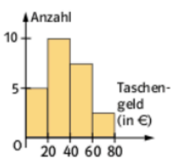


Fig. 3



Beide Diagramme zeigen dieselbe Situation, geben aber zu sehr unterschiedlichen Schlussfolgerungen Anlass. Diagramme sollten daher mit Umsicht erstellt und ausgewertet werden. Entscheidend ist die richtige Wahl der Klassengrenzen. Es empfiehlt sich, verschiedene Klasseneinteilungen vorzunehmen und Vergleiche zu ziehen. Für die Säulenhöhe kann man absolute Häufigkeiten, relative Häufigkeiten oder den Quotienten aus relativer Häufigkeit und Klassenbreite, die so genannte **Häufigkeitsdichte** verwenden.

Anschauliche Diagramme klassierter Daten, die die reale Situation widerspiegeln, erhält man mit gleichen Klassenbreiten. Dabei verwendet man als Säulenhöhe absolute Häufigkeiten, relative Häufigkeiten oder den Quotienten aus relativer Häufigkeit und Klassenbreite, die so genannte Häufigkeitsdichte.

Fig. 1 zeigt den Ausschnitt aus einer Urliste mit Geschwindigkeiten, die bei 1134 Kraftfahrzeugen in der Nähe einer Grundschule gemessen wurden. Da diese Urliste unübersichtlich ist, fasst man „benachbarte" Geschwindigkeiten zu Klassen der Breite 15 zusammen und ermittelt die zugehörigen Häufigkeiten:

Klasse (km/h)	$0 < v \leqq 15$	$15 < v \leqq 30$	$30 < v \leqq 45$	$45 < v \leqq 60$	$60 < v \leqq 75$	$75 < v \leqq 90$
Klassenmitte (km/h)	7,5	22,5	37,5	52,5	67,5	82,5
absolute Häufigkeit	90	424	444	164	10	2
rel. Häufigkeit (h)	7,9%	37,4%	39,2%	14,5%	0,9%	0,2%
Häufigkeitsdichte (f)	0,005 29	0,024 93	0,026 10	0,009 64	0,000 59	0,000 12

Die Veranschaulichung kann über zwei Diagrammformen erfolgen.

Urliste

	km/h
1	14,0
2	13,2
3	19,7
4	13,7
5	11,7
6	30,3
...	...
1129	87,6
1130	13,2
1131	19,5
1132	22,4
1133	54,0
1134	25,3

Fig. 1

Säulendiagramm
Wenn man die relativen Häufigkeiten als Längen von Säulen veranschaulicht, entsteht ein Säulendiagramm. Die Summe der Längen aller Säulen hat den Wert 1 (100%).

Histogramm
Wenn man die relativen Häufigkeiten als Flächen von Rechtecken veranschaulicht, entsteht ein Histogramm. Die Summe der Flächeninhalte hat den Wert 1 (100 %).

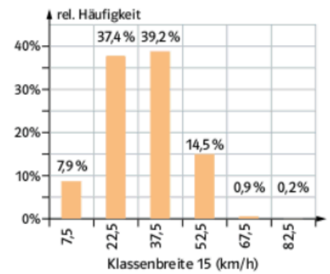


Fig. 2

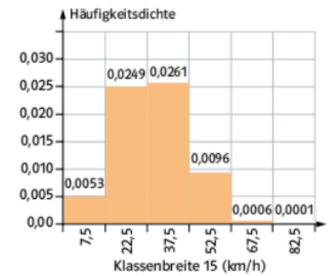


Fig. 3

Beispiel 1 (relative Häufigkeit – Häufigkeitsdichte)
a) Bei einem Test erreichten 23 von 78 Teilnehmern eine Punktzahl X von 13, 14 oder 15. Bestimme die Höhe des Histogramm-Rechtecks, also die Häufigkeitsdichte, über dem Intervall (12; 15].
b) Mit welcher relativen Häufigkeit lag die Punktzahl X im Intervall (8; 12], wenn die Häufigkeitsdichte den Wert 0,12 besitzt?
Lösung:
a) Für die relative Häufigkeit gilt $h = \frac{23}{78} \approx 0{,}295 = 29{,}5\,\%$. Die Häufigkeitsdichte ergibt sich zu $f = \frac{0{,}295}{3} \approx 0{,}098$. Das Rechteck hat die Breite 3 und die Höhe 0,098.
b) Für die gesuchte relative Häufigkeit h erhält man $h = 4 \cdot 0{,}12 = 0{,}48$, d.h. 48%.

Beachte:
$x \in (a, b]$ heißt $a < x \leqq b$
$x \in (a; b)$ heißt $a < x < b$
$x \in [a; b)$ heißt $a \leqq x < b$
$x \in [a; b]$ heißt $a \leqq x \leqq b$

Beispiel 2 (Erstellung eines Histogramms)
In der Klasse 9c mit 24 Schülern wurde mit einer Befragung ermittelt, wie hoch die Handygebühren im letzten Monat waren. Dabei ergab sich folgende Tabelle:

Gebühren in Euro	0–9,99	10–19,99	20–29,99	30–39,99	40–49,99	50–59,99
Anzahl	3	4	6	7	2	2

Berechne die Häufigkeitsdichte und zeichne ein Histogramm.

Lösung:

Gebühren in Euro	0–9,99	10–19,99	20–29,99	30–39,99	40–49,99	50–59,99
Anzahl	3	4	6	7	2	2
rel. Häufigkeit	0,125	0,167	0,25	0,292	0,083	0,083
Häufigkeitsdichte	0,0125	0,0167	0,025	0,0292	0,0083	0,0083

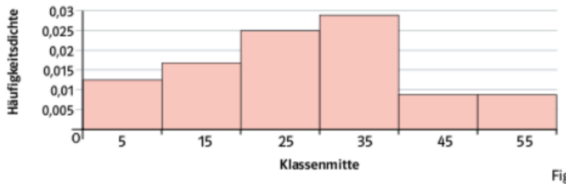


Fig. 1

Um die Anteile der einzelnen Klassen richtig einzuschätzen zu können, muss man die Rechteckflächeninhalte vergleichen. Aussagekräftige Ergebnisse erhält man aber nur, wenn die Klassenbreiten gleich gewählt werden.

Aufgaben

1 Bei sechs von 27 Schülern lagern die monatlichen Telefongebühren im Intervall (25 €; 50 €). Berechne die zugehörige relative Häufigkeit und die Häufigkeitsdichte.

2 Übertrage die durch Fig. 2 gegebene Tabelle in dein Heft und fülle die Leerstellen aus.

Klassenbreite	3	6	1,5	0,4		
relative Häufigkeit	17%		100 %		15%	20%
Häufigkeitsdichte		0,1		2	0,15	4

Fig. 2

3 Erstelle aus den im Stabdiagramm von Fig. 3 gegebenen Daten zwei Histogramme. Nutze dabei folgende Klasseneinteilung:
1. Histogramm: 2,5–7,5; 7,5–12,5; 12,5–17,5; …; 32,5–37,5
2. Histogramm: 4,5–9,5; 9,5–14,5; 14,5–19,5; 19,5–24,5; 24,5–29,5; 29,5–34,5
Was ergibt ein Vergleich der beiden Histogramme? Welches ist realistischer und weshalb?

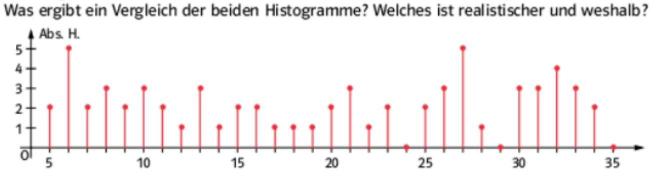


Fig. 3

Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen

1 In der Tabelle sind die jährlichen Niederschlagsmengen einiger Orte dargestellt.

Beobachtungsstation	Niederschlagsmenge (in l/m²)
List auf Sylt	804
Greifswald	647
Lübeck	994
Hannover	802
Potsdam	766
Leipzig	591
Frankfurt a. M.	727
Trier	795
Regensburg	898
Freiburg i. Br.	989

a) Stelle die angegebenen jährlichen Niederschlagsmengen in einem Boxplot dar.
b) Beurteile unter Nutzung der Deutschlandkarte die regionale Verteilung der Niederschlagsmengen. Was sind die Gründe für die regionalen Unterschiede?
c) Angenommen, in Lübeck fiele im gleichen Beobachtungszeitraum doppelt so viel Niederschlag. Welche Lagemaße würden sich verändern? Was ändert sich dann beim Boxplot?

2 Die Notenspiegel zeigen die Ergebnisse einer Mathematikarbeit in drei Klassen.

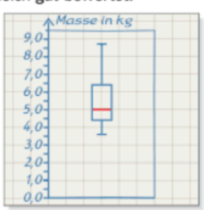
Klasse	Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6
9a	2	5	10	9	3	0
9b	2	6	11	7	3	0
9c	0	4	12	3	1	0

Begründe mithilfe der Lagemaße, in welcher Klasse die Arbeit am besten ausfiel.

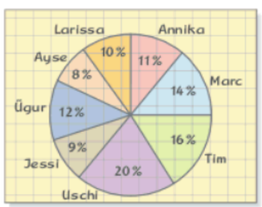
3 Die Massen von Schultaschen (Fig. 1) sollen im Rahmen einer Klassenarbeit sinnvoll grafisch dargestellt werden. Tim und Annika haben verschiedene Diagramme gezeichnet. Der Lehrer bewertet die beiden Diagramme sehr unterschiedlich.
a) Welches Diagramm bekommt vermutlich die geringere Punktzahl, weil es nach Auffassung des Lehrers sinnlos ist? Wie könnte die Begründung des Lehrers aussehen?
b) Versuche durch einen geeigneten Erläuterungstext den Lehrer umzustimmen, sodass er beide Diagramme gleich gut bewertet.

Annika	4,7 kg
Marc	6,2 kg
Tim	7,1 kg
Uschi	8,7 kg
Jessi	3,9 kg
Ügur	5,2 kg
Ayse	3,6 kg
Larissa	4,6 kg

Fig. 1



Tim



Annika

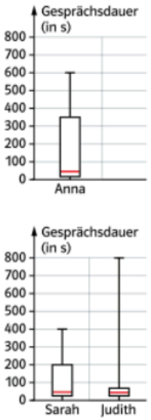


Fig. 1

4 Fig. 1 veranschaulicht die Dauer der von Sarah, Judith bzw. Anna im Monat März geführten Telefongespräche.
a) Was kannst du daraus über das Telefonierverhalten der drei Mädchen ablesen?
b) Wie schätzt du dein eigenes Telefonierverhalten ein? Zeichne einen Boxplot.
c) Judith hatte im betrachteten Monat die höchste Telefonrechnung. Kann das mit rechten Dingen zugehen oder muss da etwas falsch gelaufen sein? Begründe deine Meinung.

5

Monat	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Niederschlag in mm	35	42	41	45	30	85	120	75	20	40	88	115

Berechne zu den gemessenen Niederschlagsmengen
a) den Durchschnitt, b) den Zentralwert, c) die Spannweite,
d) die mittlere Abweichung vom Durchschnitt, e) die Varianz,
f) die Standardabweichung.

6 Fig. 2 zeigt die Häufigkeit, mit der verschiedene Altersgruppen in Unfälle im Straßenverkehr verwickelt sind. Die Darstellung legt die Vermutung nahe, dass für 18- bis 60-Jährige der Straßenverkehr am gefährlichsten ist.
a) Trifft das in Wirklichkeit zu? Begründe deine Antwort.
b) Gegen welches grundlegende Prinzip bei der Wahl der Klassenbreiten hat man bei dem durch Fig. 2 gegebenen Histogramm verstoßen?
c) Welche Altersgruppeneinteilung würdest du vornehmen?

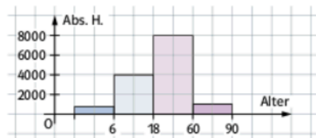


Fig. 2

d) Versuche aus Fig. 2 herauszufinden, welche der von dir gewählten Altersgruppen im Straßenverkehr am stärksten gefährdet sind.

7 Peter und Sonja haben im gesamten Schuljahr je sieben Noten im Fach Mathematik bekommen. Für die erreichten Noten ermitteln beide den Median und vergleichen. Bei Peter ist er 2, bei Sonja 3. Peter ist nun davon überzeugt, von beiden der bessere „Mathematiker" zu sein. Der Mathematiklehrer ermittelt aus den Noten die Jahresnoten, und da erhält Peter eine 3, Sonja aber eine 2. Wie kann das sein?

8 Eine Umfrage zur Anzahl der im Haushalt lebenden Tiere ergab folgende ungeordnete Liste: 6; 2; 0; 1; 1; 3; 2; 2; 1; 0; 0; 3; 4; 1; 1; 2; 2; 2; 5; 3; 2; 3; 4; 4.
a) Bestimme die Lagemaße.
b) Stelle die Anzahl der Haustiere pro Haushalt sowohl in einem Histogramm als auch in einem Kreisdiagramm und einem Boxplot dar. Welche der Darstellungen sagt dir am meisten zu? Begründe deinen Standpunkt.

9 In einer Tageszeitung einer Großstadt erfolgt einmal im Jahr getrennt nach Schularten (Grundschule, Oberschule, Gymnasium) eine Bewertung der Schulen der Stadt. Damit will man Eltern und Schülern Hilfe geben bei der Auswahl der für sie günstigsten Schule. Was sollten deiner Meinung nach die wichtigsten Kriterien sein, die für die Bewertung einer Schule von Bedeutung sind? Gehe dabei auf den Stellenwert ausgewählter Kriterien für die verschiedenen Schularten ein.

10 Über die drei Mathematikarbeiten, die in diesem Schuljahr in der aus 20 Schülern bestehenden 9. Klasse geschrieben wurden und bei denen jeweils alle Schüler der Klasse mitgeschrieben haben, ist bezüglich der erreichten Noten folgendes bekannt:
1. Arbeit: Spannweite 1; Notendurchschnitt 2,5
2. Arbeit: Spannweite 3; Notendurchschnitt 2,5; dreimal Note 1
3. Arbeit: Spannweite 4; Notendurchschnitt 3; zweimal Note 1; dreimal Note 2
Gib für jede der drei Arbeiten einen passenden Notenspiegel der Klasse an.

11 Im Sportunterricht einer sechsten Klasse steht Schlagballweitwurf auf dem Programm. Von den 12 anwesenden Jungen der Klasse werden folgende Weiten (in Meter gemessen) erzielt:
23; 17; 19; 29; 21; 18; 31; 22; 29; 26; 24; 28
Berechne das arithmetische Mittel und den Median der erzielten Weiten.
Gegen Ende der Sportstunde kommt noch das Sportass Lars hinzu, der ebenfalls noch einmal werfen darf und eine Weite von 42m erzielt. Ermittle, welchen Einfluss das auf das arithmetische Mittel und den Median hat. Welche Aussagen über den Einfluss sogenannter „Ausreißer" auf arithmetisches Mittel und auf Median kann man formulieren?

12 Bei einer Stichprobe zur Überprüfung der Angaben für den Verbraucher werden zufällig je zehn Pralinenpackungen mit einem angegebenen Füllgewicht von 250 Gramm von zwei Herstellern ausgewählt und ihr Inhalt wird gewogen:
Firma 1: 248, 253, 251, 249, 246, 254, 246, 250, 252, 247
Firma 2: 247, 248, 253, 253, 248, 253, 252, 251, 249, 248
a) Ermittle für beide Stichproben jeweils die Spannweite sowie den Durchschnitt der Werte.
b) Welche Firma würdest du auf Grund der Ergebnisse von Teilaufgabe a) bevorzugen? Begründe deine Entscheidung.
c) Ermittle für beide Stichproben jeweils die mittlere Abweichung, die quadratische Abweichung sowie die Standardabweichung.

13 Norman ist Schüler der Klasse 9c. Die 25 Schüler der Klasse hatten eine Klassenarbeit geschrieben, deren Ergebnisse der Lehrer in einem Notenspiegel festgehalten hatte. Norman hatte ihn übernommen, aber wie er später bemerkte, nicht vollständig. Er hatte vergessen einzutragen, wie viele Schüler die Noten 1 und 2 erzielt hatten.

Noten	1	2	3	4	5	6	Klassendurchschnitt
Anzahl			10	5	1	0	2,76

Hilf Norman dabei, die Anzahl der in dieser Klassenarbeit erzielten Noten 1 und 2 zu ermitteln.

14 Welche Aussagen über eine Stichprobe kannst du formulieren, wenn ihre Standardabweichung den Wert Null besitzt? Wie groß ist in einem solchen Fall die Spannweite dieser Stichprobe?

15 Als Paul seine Hausaufgaben erledigen will, stellt er erschreckt fest, dass seine Aufschriebe nicht vollständig sind. Er hat sich mit 11, 15, 16, 18 und 29 nur fünf der sechs Werte einer Stichprobe notiert. Paul weiß noch, dass der Durchschnitt der Stichprobenwerte 19 beträgt. Die Aufgabe lautet, für die Stichprobe die mittlere Abweichung sowie die quadratische Abweichung vom Durchschnitt zu bestimmen.
Wie muss er vorgehen?

Exkursion Mit Graphen und Diagrammen mogeln

Funktionen werden in Fachbüchern, Zeitschriften oder Zeitungen häufig durch Graphen oder Diagramme dargestellt. Besser als in Wertetabellen lassen sich so Eigenschaften der Funktionen gut ablesen. Man erkennt zum Beispiel auf einen Blick, wo Funktionswerte positiv oder negativ sind, in welchen Bereichen sie ansteigen oder abfallen bzw. wo sie maximale oder minimale Werte annehmen. Die meisten verwendeten Graphen sind einwandfrei. Mitunter wird aber auch gemogelt, um beim Leser einen gewünschten Eindruck hervorzurufen.

Eine Firma erzielte in den Jahren 2002 bis 2012 folgende Verkaufszahlen:

Jahr	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Verkaufszahlen	8849	8853	8862	8863	8862	8871	8874	8879	8879	8873	8871

Aufgrund dieser Werte werden folgende Grafiken erstellt:

Fig. 1

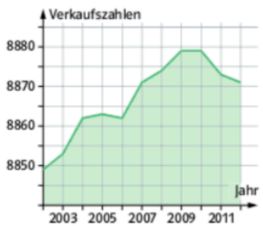


Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

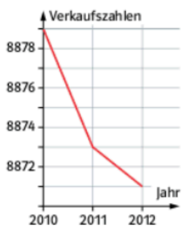


Fig. 5

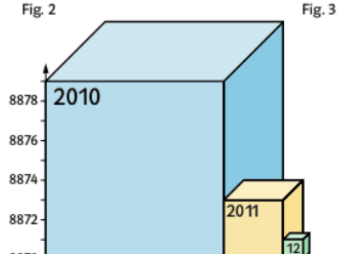


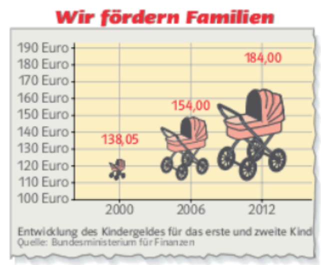
Fig. 6

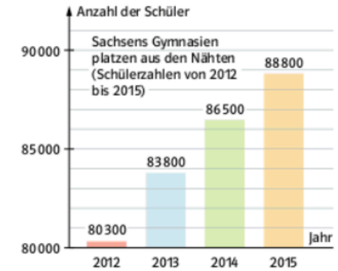
1 Untersuche, ob in den Darstellungen von Fig. 1 bis Fig. 6 die Entwicklung der Verkaufszahlen richtig wiedergegeben wurde.

2 Beschreibe, welchen Eindruck man bei einzelnen Darstellungen gewinnen kann und wodurch dieser Eindruck erzeugt wird.

3 Überlege, welche Personen Interesse an den verschiedenen Darstellungen haben könnten. Schreibe aus Sicht dreier dieser Personen jeweils einen kurzen Zeitungsartikel zu der entsprechenden Grafik mit einer geeigneten Überschrift.

4 Untersuche die folgenden Grafiken im Hinblick auf Mogeleien.





5 Beim Entwurf für den Haushaltsplan in einer Großstadt gibt es Unstimmigkeiten in Bezug auf die Ausgaben für die öffentliche Sicherheit. Ein Teil der Mitglieder der Stadtverordnetenversammlung ist der Meinung, dass auf Grund der Sicherheitslage die Ausgaben gesenkt werden können, während der andere Teil für eine Erhöhung plädiert. Mit folgenden auf den gleichen Daten beruhenden Grafiken untermauern die beiden Gruppen ihre Auffassung:

Welche Gruppe hat deiner Ansicht nach Recht? Ist eine der Grafiken falsch, oder geht es nur darum, die Grafiken richtig zu lesen?

6 Norman erhielt für seine Leistung in der Mathematikarbeit die Note 2. Der Klassendurchschnitt der 25 Schüler ist 3,0. Der Mathelehrer hatte mit einem Stempel den Notenspiegel ins Arbeitsheft gebracht.

Note	1	2	3	4	5	6	∅
Anzahl							3,0

Fig. 1

Er hatte dort, wie in Fig. 1 ersichtlich, den erreichten Durchschnitt eingetragen, aber vergessen anzugeben, wie viele Schüler jeweils die einzelnen Noten erreicht haben. Welche Daten müsste Norman eintragen, wenn er bei seinen Eltern Eindruck erwecken möchte, dass er eine Spitzenleistung erzielt hat? Könnte es auch sein, dass er mit der Note 2 zum schwächeren Teil der Klasse gehört? Begründe deine Auffassung.

7 Sucht in Zeitungen und Zeitschriften nach Grafiken und kontrolliert, ob und in welcher Form dort bei Darstellungen gemogelt wurde.

8 Im Lokalblatt einer Stadt wird im Sportteil kurz über die Ergebnisse eines Leichtathletiksportfestes berichtet. Hervorgehoben wird in der Meldung, dass sich im Weitsprung die drei Vertreterinnen des örtlichen Sportvereins alle unter den besten Sechs platzieren konnten. Leichtathletikfan Gunar ruft in der Redaktion an, um genauere Informationen über die Platzierung der drei Sportlerinnen zu erfahren. Ihm wird mitgeteilt, dass die drei die Plätze vier, fünf und sechs belegt haben und dass es insgesamt sieben Teilnehmerinnen gab. Man hat mit der Zeitungsmeldung das Resultat also positiver „verkauft", als es tatsächlich war. Wenn du den Fakt, dass Ron im Sprint unter 10 Teilnehmern den vierten Platz belegt hat, als Kurzmeldung formulieren solltest, wie könnte diese dann in positiver bzw. negativer Form lauten?

Porträt Papst Leo XIII. (1810–1903), Papst von 1878–1903

9 Man sagt eigentlich zu Recht, dass regelmäßige sportliche Betätigung gesund ist und folglich ein Grund dafür sein kann, dass man dann auch auf ein längeres Leben hoffen darf. Wenn man aber die durchschnittliche Lebenserwartung für Mitglieder bestimmter Berufsgruppen betrachtet, stimmt einen das doch nachdenklich. Jeder versteht, dass Perlentaucher, Sumoringer oder früher im Uranbergbau tätige Grubenarbeiter eine relativ geringe durchschnittliche Lebenserwartung haben. Woran mag es aber wohl liegen, dass die Gruppe der Päpste eine der Gruppen mit der höchsten Lebenserwartung ist?

10 Im Internet findet man eine „Liste mit Großstädten in Deutschland" mit Angaben zur Einwohnerzahl dieser Städte. Für ausgewählte Städte sind diese Angaben für die Jahre 2010 und 2011 in der nebenstehenden Tabelle zusammengefasst.

	Berlin	Dresden	Leipzig	Chemnitz
2010	3 400 725	523 058	522 883	243 248
2011	3 501 872	529 781	531 809	243 173

Was hältst du von diesen Zahlenangaben? Wieso hat Sarah recht, wenn sie beim Betrachten dieser Angaben sagt, dass sie schon gern wissen möchte, in welchem Monat jeweils die Zählung erfolgte. Kannst du Gustav verstehen, der anfügt, dass man bei solchen Zahlen sogar Tag und Stunde angeben muss? Was wäre aus deiner Sicht eine sinnvolle Genauigkeit für die Angabe von Einwohnerzahlen von Großstädten?

11 Beim Einkauf im Supermarkt interessieren sich Sonja und Petra für die Preise der einzelnen Artikel.
Bei den Regalen stellen sie fest, dass es sehr viele Waren gibt, deren Preise mit 99 Cent enden. Generell haben die meisten Preise am Ende eine 9 oder 5 stehen. Einen Preis, bei dem nach dem Komma eine 01 oder eine 02 steht, suchen die beiden vergebens. An der Fleischtheke finden sie die Kilopreise für Fleischwaren, die oftmals auch nach dem Komma eine 99 stehen haben. Wurstwaren werden mit Preisen für jeweils 100 Gramm versehen, auch dort dominiert als letzte Ziffer die 9.
Ist das alles zufällig, oder könnte es auch andere Gründe für dieses auf den ersten Blick überraschende Erscheinungsbild geben?

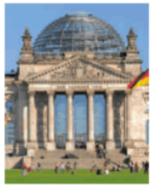
12 Im ZDF wird regelmäßig ein Politbarometer erstellt, in dem die politische Stimmungslage unter der Bevölkerung der BRD in Bezug auf die verschiedenen Parteien erfasst wird. Am 22. Februar 2013 wurde durch den Fernsehsender das nebenstehende Umfrageergebnis präsentiert.
Natürlich möchte jede Partei die Ergebnisse dieser Umfrage nutzen, um sowohl die eigenen Mitglieder als auch ihre Anhänger zu motivieren und aus der Umfrage für sich etwas Positives ableiten.

Politische Stimmungslage

	Nov 2	Dez	Jan 1	Jan 2	Febr
CDU/CSU	40%	44%	49%	45%	41%
SPD	32%	34%	27%	31%	33%
FDP	2%	2%	2%	2%	3%
Linke	6%	5%	4%	5%	5%
Grüne	15%	13%	13%	13%	15%
Piraten	4%	1%	2%	2%	–

Fig. 1

Ausgehend von den in der Tabelle Fig. 1 erfassten Daten wären z. B. folgende Formulierungen möglich:



CDU/CSU	Wir sind stets die stärkste Partei und konnten seit November noch von 40% auf 41% zulegen.
SPD	Ausgehend von der ersten Umfrage des Jahres sind uns im Jahr 2013 deutliche Steigerungen gelungen.
FDP	Seit November 2012 haben wir 50% Zuwachs erzielt.
Linke	25% Zuwachs seit Anfang Januar stimmen uns hoffnungsvoll.
Grüne	Es ist uns gelungen, von Dezember bis jetzt deutlich zuzulegen.
Piraten	Nach einem Tief im Dezember ging es im Januar wieder aufwärts.

Stell dir nun vor, du hättest die Aufgabe, bei jeder Partei die Entwicklung ihrer politischen Stimmungslage kritisch zu sichten. Welche sich aus den vorliegenden Daten ergebende Formulierungen wären denn dann möglich?

13 Mogeleien gibt es natürlich auch anderswo. So versucht Silvio seinen Klassenkameraden klarzumachen, dass sie beim besten Willen keine Zeit für das Lernen haben. Er begründet das wie folgt:
„Zur Vorbereitung auf den Schlaf, den Schlaf selber und das Aufstehen benötigt ihr zwei Fünftel des Tages, also 146 Tage im Jahr. Für den Rest bleiben dann noch höchstens 220 Tage (im Schaltjahr). Zum Essen benötigt ihr 5 Viertel Stunden pro Tag, also im Jahr 19 Tage. Damit verbleiben noch 201 Tage. Eine Stunde am Tag sitzt bestimmt jeder am Computer, am Fernseher oder liest ein Buch. Das sind weitere 15 Tage im Jahr. So etwa anderthalb Stunden am Tag dürften für die Schulwege und für notwendige Erholungspausen benötigt werden. Das sind 23 Tage im Jahr und damit verbleiben noch 163 Tage. Wenn wir davon noch die 52 Sonntage und die 101 Ferientage abziehen, bleiben 10 Tage übrig. Nun gibt es ja aber im Jahr auch noch 10 Feiertage. Das bedeutet, dass zum Lernen noch 0 Tage, also überhaupt keine Zeit verbleibt."
Muss man sich nun mit dieser sehr bedauerlichen Situation abfinden, oder enthalten die Ausführungen von Silvio Ungereimtheiten?
Muss man ihn eventuell auf Denkfehler aufmerksam machen?

Rückblick

Bei **statistischen Erhebungen** werden Daten als Stichproben gesammelt. Die **Stichprobe** ist eine Teilgruppe der Gesamtheit. Stimmt sie in ihren Eigenschaften weitgehend mit der Gesamtheit überein, so heißt sie **repräsentativ**. Die Aussagen über die Stichprobe können dann auf die Gesamtheit übertragen werden.

Ordnen von Daten
Lassen sich Daten einer Stichprobe der Reihe nach ordnen, so erhält man eine **Ordinalskala**.
Sind die Abstände zwischen zwei benachbarten Folgegliedern einer Ordinalskala gleich groß, dann bezeichnet man diese als **metrische Skala**.
Lässt sich für die Daten einer Stichprobe keine Reihenfolge angeben, ergibt sich eine **Nominalskala**.

Meinungsumfragen und Verkehrszählungen sind Beispiele für statistische Erhebungen
Merkmale: 15; 3; 6; 11; 16
Ordinalskala: 3; 6; 11; 15; 16

metrische Skala: 4; 6; 8; 10; 12; 14
Merkmale: rot, blau, violett, gelb, grün
Nominalskala: Auflistung der Farben

Lagemaße
Lagemaße beschreiben die Verteilung von Daten einer Stichprobe genauer. Zu den Lagemaßen gehören der Modalwert, der Median und das arithmetische Mittel.
Der **Modalwert** ist der häufigste Wert in der Liste.
Der **Median (Zentralwert)** liegt in der Mitte einer geordneten Liste. Man schreibt dafür z. Der Median teilt den Datensatz in zwei Hälften. Ist die Anzahl der Daten gerade, so nimmt man das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte als Median.
Das **arithmetische Mittel** (Durchschnitt) errechnet man, indem man alle Werte addiert und durch die Anzahl dividiert. Es wird mit $\bar{x}$ bezeichnet.

Urliste: 15; 12; 7; 6; 15; 14; 11; 7; 7; 16

7 ist der Modalwert.
Geordnete Liste:
6; 7; 7; 7; 11; 12; 14; 15; 15; 16
$z = (11 + 12) : 2 = 11{,}5$ *ist der Median.*

$\bar{x} = (6 + 7 + 7 + 7 + 11 + 12 + 14 + 15 + 15 + 16) : 10 = 11$

Streuungsmaße
Zu den Streuungsmaßen gehören die Spannweite, die mittlere Abweichung vom Durchschnitt, die Varianz und die Standardabweichung.
Die **Spannweite** d ist die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert.
Die **Mittlere Abweichung** vom Durchschnitt ist die Summe der Beträge aus Listendaten und Mittelwert $\bar{x}$, geteilt durch die Anzahl der Daten der Stichprobe.
Die **Varianz** s^2 ist die Summe der Quadrate der Differenzen aus Listendaten und Mittelwert $\bar{x}$, geteilt durch die Datenanzahl.
Die **Standardabweichung** s ist die Wurzel aus der Varianz.

$d = 16 - 6 = 10$

$\frac{|6-11| + |7-11| \cdot 3 + |11-11| + |12-11| + |14-11| + |15-11| \cdot 2 + |16-11|}{10}$

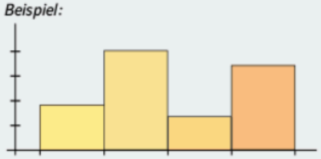
$= 3{,}4$

$s^2 = \frac{(6-11)^2 + (7-11)^2 \cdot 3 + \ldots + (15-11)^2 \cdot 2 + (16-11)^2}{10} = 14$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$

Histogramme
Histogramme veranschaulichen die Anteile nach erfolgter Klasseneinteilung. Die relativen Häufigkeiten werden als Flächen von Rechtecken veranschaulicht, deren Summe 1 beträgt. Die Breite der Rechtecke entspricht der Klassenbreite. Die Höhe berechnet man mit relativer Häufigkeit durch Klassenbreite, der sogenannten Häufigkeitsdichte.

Beispiel:



Training

1 Erstelle eine geordnete Liste der Erhebung und ermittle die Lagemaße:
2; 4; 4; 8; 10; 8; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 10; 8; 6; 6; 6; 4; 4; 6; 2; 2; 4; 10; 8; 6; 6; 8; 10.

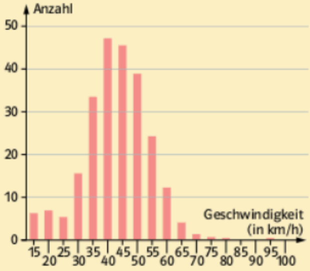
2 Bestimme für die in der Tabelle angegebenen Werte den Modalwert, den Median und das arithmetische Mittel.

Wert	10	20	30	40	50	60	70
Absolute Häufigkeit	13	14	21	23	13	19	7

3 Eine Befragung der Teilnehmer einer Arbeitsgemeinschaft Schach hat ergeben, dass sieben Teilnehmer 12 Jahre, zehn Teilnehmer 13 Jahre, sechs Teilnehmer 14 Jahre alt sind und ein Teilnehmer 15 Jahre alt ist.
a) Erstelle ein Säulendiagramm mit den absoluten Häufigkeiten.
b) Erstelle einen Boxplot zur Altersstruktur der AG-Mitglieder.
c) Welche Bedeutung haben bei dieser Befragung der Modalwert, der Median und das arithmetische Mittel?

4 In der 9a kamen 12 Schüler mit dem Fahrrad, 9 Schüler mit dem Bus, 6 Schüler zu Fuß in die Schule und 3 Schüler wurden mit dem Auto gebracht.
a) Berechne die zugehörigen relativen Häufigkeiten in Brüchen und in Prozent.
b) Zeichne ein Säulendiagramm zu den absoluten Häufigkeiten.
c) Zeichne ein Kreisdiagramm zu den relativen Häufigkeiten.

5 Die Geschwindigkeiten, die während eines Tages auf einer Straße in einer geschlossenen Ortschaft gemessen wurden, sind (immer auf Vielfache von 5 km/h gerundet) in nebenstehendem Diagramm veranschaulicht.
a) Wie viel Prozent der Autofahrer fuhren schneller als die erlaubten 50 km/h?
b) Wie viel Bußgeld wäre an diesem Tag fällig geworden, wenn die Polizei jeden Temposünder geblitzt hätte?
c) Denke dir ein Diagramm aus, mit dem du die Höhe der eingenommen Bußgelder gut veranschaulichen könntest.



Bußgeldkatalog (2013): Eine Geschwindigkeitsüberschreitung kostet

bis 10 km/h	*15 €*
bis 15 km/h	*25 €*
bis 20 km/h	*35 €*
bis 25 km/h	*80 € 1P.*
bis 30 km/h	*100 € 3P.*
bis 40 km/h	*160 € 3P.*
bis 50 km/h	*200 € 4P.*
bis 60 km/h	*280 € 4P.*

In den letzten drei Fällen wird der Führerschein für ein bzw. zwei Monate eingezogen.

6 Veranschauliche jeweils durch ein selbst gewähltes Zahlenbeispiel, was mit folgenden Aussagen gemeint ist.
a) Durchschnittlich kamen 26 000 Zuschauer zu den Heimspielen.
b) Durchschnittlich wurden im Diktat 6,2 Fehler gemacht.
c) Bei jedem zweiten Fahrrad funktioniert die Beleuchtung nicht.

7 Bei einem Test werden in einer 9. Klasse folgende Größen (in cm) ermittelt:
Jungen: 165, 154, 159, 173, 182, 161, 175, 181, 176, 162, 169, 178, 161, 180
Mädchen: 170, 152, 158, 167, 155, 174, 178, 162, 163, 170, 173, 167, 163, 168
Berechne für beide Datengruppen jeweils den Mittelwert, den Median, die Varianz und die Standardabweichung. Vergleiche die Ergebnisse.

Lösungen auf Seite 249.